

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Modélisation de la formation du prix sur le marché avec échange d'information

MEYER, Pauline

Award date:
2012

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Modélisation de la formation du prix sur le marché avec échange d'information

Pauline Meyer

Promoteur: T. Carletti

Janvier 2012

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Carletti, qui, en tant que promoteur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation. Merci pour votre inspiration, votre aide, votre patience et le temps que vous m'avez consacré.

Merci également à Simone Righi, pour ses réponses utiles, mais également ses questions qui auront poussé ma réflexion.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à Monique Marsden et Amélie Da Conceicao Lima pour la lecture et la correction de ce mémoire. Merci pour le temps que vous y avez consacré et pour votre complémentarité.

Je n'oublie pas mes soeurs, ma maman et Jehan pour leur soutien, leur écoute et leur conseil tout au long de mes études et particulièrement lors de la création de ce travail. Merci d'avoir toujours été là et d'avoir cru en moi.

Merci à tous et à toutes.

Résumé

Nous considérons un marché financier de fixing dans lequel un seul actif est échangé par jour. Les agents présents sur le marché anticipent les prix afin de choisir s'ils vont acheter ou vendre. Nous modélisons microscopiquement la formation du prix des actifs, en considérant qu'il dépend de l'information que possèdent et échangent les individus. Cette modélisation est effectuée grâce à l'introduction de divers paramètres.

En fixant la valeur fondamentale de l'actif, nous étudions pour quelles valeurs des paramètres, le prix obtenu par le modèle converge vers cette valeur fondamentale. Lorsque ce sera le cas, nous dirons que le marché est efficient. Cette analyse nous permettra de tirer des conclusions quant à l'efficacité des échanges entre les agents.

Nous étudierons également la situation dans laquelle les agents adaptent leur stratégie quotidiennement, ils font évaluer la valeur d'un des paramètres en fonction des événements de la veille afin de minimiser les pertes ou de maximiser les gains. De plus, nous considérerons également un marché où les agents sont divisés en deux groupes. Les agents appartenant à chacun des groupes auront une stratégie différente.

Abstract

We consider a financial market in which one asset is exchanged daily. Agents on the market anticipate prices to choose whether they buy or sell. We model microscopically the formation of asset prices, considering that it depends on the information that individuals possess and exchange. This model is done through the introduction of various parameters.

In determining the fundamental value of the asset, we study for which parameters values, the price obtained by the model converges to the fundamental value. When this is the case, we say that the market is efficient. This analysis will allow us to draw conclusions about the efficacy of the exchanges between agents.

We will also study the situation in which agents adapt their strategy on a daily basis, they assess the value of one of the parameters based on the events of the day before, to minimize losses or maximize gains. In addition, we also consider a market where agents are divided in two groups. The agents who are in each group will have a different strategy.

Table des matières

Introduction	1
1 Fonctionnement des marchés financiers	4
2 Modèle général	7
2.1 Modélisation de la formation des anticipations de prix d'un actif . .	7
2.2 Mécanisme de formation du prix	10
2.3 Exemple	15
3 Analyse selon la composante d'adaptation	19
3.1 Anticipation par adaptation totale du prix passé	20
3.2 Anticipation basée sur l'interaction sociale	30
3.2.1 Forte confirmation des tendances : $\sigma \ll 1$	31
3.2.2 Faible confirmation des tendances : $\sigma \sim 1$	37
3.3 Anticipation basée sur une combinaison des tendances	48
4 Analyse selon une stratégie adaptative	57
4.1 Modification totale de la composante d'adaptation : $\lambda = 1$	60
4.1.1 Évolution de la composante d'adaptation	61
4.1.2 Analyse de l'efficience du marché	66
4.1.3 Remarque : révision par tous les agents	71
4.2 Modification contrôlée de la composante d'adaptation : $\lambda \in]0, 1[$.	73
4.2.1 Évolution de la composante d'adaptation	74
4.2.2 Analyse de l'efficience du marché	77
5 Analyse d'un marché non-homogène	81
5.1 Répartition des agents en deux groupes égaux	82
5.2 Répartition des agents en deux groupes selon une variable Q	86
Conclusion	90
Annexes - Bibliographie	93

Introduction

Dans notre quotidien, nous effectuons tous des échanges. Ces échanges peuvent être de types fort différents : échanges d'informations, échanges d'objets, échanges d'un objet contre de l'argent,... Le lieu où plusieurs échanges s'effectuent en un certain laps de temps, s'appelle, en économie, *le marché*. Il existe une grande diversité de marchés, que ce soit au niveau des produits que l'on y trouve ou du fonctionnement de ceux-ci.

Le prix des objets que nous échangeons sur les marchés que nous fréquentons est fixé de manière macroscopique par la loi de l'offre et de la demande. Cette loi est représentée à la figure 1. La courbe de l'offre représente ici l'action du vendeur. Plus le prix sera élevé, plus celui-ci souhaitera offrir une grande quantité à la vente. L'acheteur, quant à lui, "demande" le produit. Plus le prix sera grand, moins ce dernier souhaitera en acheter une quantité importante. Les acheteurs et vendeurs doivent se mettre d'accord sur un prix appelé "équilibre" entre la quantité offerte par le vendeur et la quantité désirée par l'acheteur en fonction du prix du produit. Si un équilibre est trouvé, il y aura échange d'une certaine quantité du produit à ce prix.

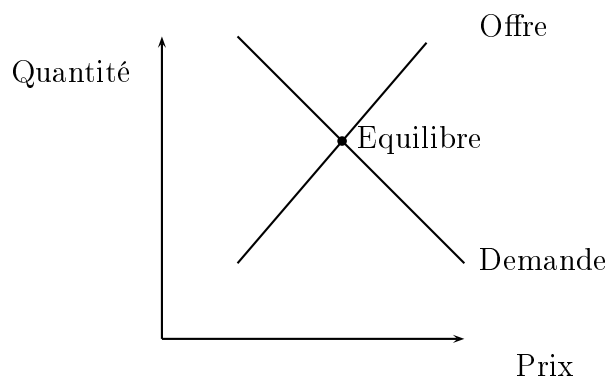


FIGURE 1 – Loi de l'offre et de la demande

Le marché que nous allons étudier est celui dans lequel sont échangés des actifs, *le marché financier*. Un *actif* est un élément possédant une certaine valeur économique et détenu par une personne physique ou morale (une entreprise par exemple). Un actif a les particularités de pouvoir toujours être transformé en espèces et d'avoir une valeur variable. Le plus souvent, par actif, on entend un titre financier (une action ou une obligation) lié à une entreprise, un chèque, une somme d'argent,...

L'objet de ce mémoire est de modéliser la formation du prix des actifs de manière microscopique, c'est-à-dire en se mettant dans la position des personnes qui échantent les produits. Cela devrait nous permettre de comprendre le comportement des modèles macroscopiques.

Pour ce faire, nous allons d'abord expliquer brièvement le fonctionnement du marché financier et définir de manière plus concrète les termes qui s'y rapportent. Nous émettons ensuite les hypothèses nécessaires afin que notre modèle s'en approche le plus possible. Elles nous permettront également d'effectuer la modélisation décrite préalablement.

Sur un marché financier, les personnes qui participent au marché anticipent le prix des actifs qui vont être échangés. Nous émettons l'hypothèse qu'à son ouverture, le marché est composé de beaucoup d'agents dont les anticipations initiales sont uniformément distribuées. C'est la première chose que nous modéliserons en considérant que les révisions des anticipations sont basées sur deux grandes tendances : l'adaptation du prix passé de l'actif et l'interaction sociale entre les individus. Ensuite, nous modéliserons la formation du prix des actifs qui, lui, dépend entre autres des anticipations qui auront été effectuées.

Après avoir modélisé la formation du prix, nous ferons varier les paramètres utilisés afin d'étudier les variations de ce prix. Notre but, pour chacune des situations que nous étudierons sera de montrer dans quel cas le prix converge vers une valeur fixe dite *valeur fondamentale de l'actif*. Lorsque le prix a convergé, selon notre modèle, le marché se termine.

Nous dirons que le marché est *efficient* lorsque son prix final est proche de la valeur fondamentale. Cela nous permettra de tirer des conclusions sur l'efficacité de l'information échangée entre les agents. Les résultats analytiques que nous obtiendrons seront ensuite validés numériquement.

L'ensemble de ces modélisations sont basées sur l'article "*Follies subdued : In-*

formational efficiency under adaptive expectations and confirmatory bias" de Gani ALDASHEV, Timoteo CARLETTI et Simone RIGHI [1].

Dans les analyses effectuées jusqu'alors, nous avons considéré que au maximum un actif est échangé par jour entre deux personnes sur le marché financier, mais aussi que les individus étaient égaux, c'est-à-dire qu'ils utilisaient tous la même stratégie à chaque période.

Dans la continuité des modélisations provenant de l'article, nous étudierons la situation dans laquelle les agents sont égaux à la base, c'est-à-dire que le marché est homogène, mais ils sont intelligents. Ils vont donc réagir à la situation et changer leur façon de procéder pour ne pas perdre de l'argent. Nous représentons cela par le fait qu'ils adaptent leur stratégie (c'est à dire le choix du poids des tendances pour former leur anticipation) par rapport aux événements du passé.

Nous montrerons que selon la modélisation que nous avons fixée, il est plus intéressant que seuls les agents ayant acheté à la période antérieure adaptent leur stratégie. Nous étudierons l'évolution de la composante d'adaptation en fonction des autres variables. Nous tenterons également d'établir dans quel cas et pour quelles valeurs des paramètres le marché est le plus efficient.

Dans le chapitre 5, nous considérerons un autre type de marché. Les agents présents ne seront pas intelligents, ils seront inégaux. Ce marché est non-homogène. Les agents seront répartis en deux groupes et auront une composante d'adaptation initiale différente. Cette dernière sera fixée pour toute la durée du marché. Nous distinguerons, les cas où les agents seront divisés en deux groupes égaux en nombre ou non. Notre but sera à nouveau d'étudier dans quel cas de figure le marché est le plus efficient et quelles valeurs des paramètres il est préférable d'attribuer aux agents.

Chapitre 1

Fonctionnement des marchés financiers

Cette section a pour but d'expliquer le fonctionnement d'un marché financier et ses particularités, ce qui nous permettra d'utiliser par la suite le vocabulaire adéquat.

Comme nous l'avons déjà expliqué brièvement, un marché financier est un marché sur lequel sont échangés des actifs (que nous appellerons parfois les titres). Ce marché se décompose en deux sous-marchés, à savoir, le marché primaire et le marché secondaire. Le schéma de la figure 1.1 rend compte de cette particularité.

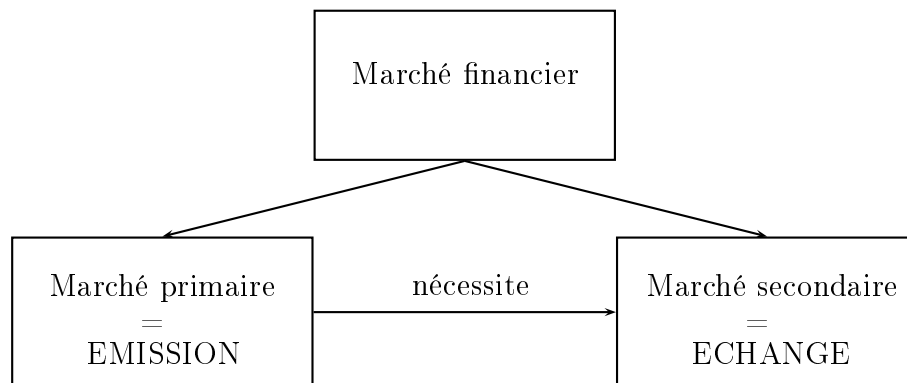


FIGURE 1.1 – Le marché financier

Le marché primaire est le marché sur lequel des titres sont émis. Il permet donc le transfert des actifs de l'émetteur (par exemple l'entreprise) à un public

d'investisseurs qui, lui, sera intéressé par l'achat de ces titres et par la possibilité de les échanger. Ce marché assure le financement de la firme (si les actifs correspondent à une entreprise), d'un Etat,...

Le marché secondaire permet l'échange des actifs entre les différents participants. Il n'est pas possible d'avoir un marché primaire sans marché secondaire. La qualité du marché secondaire, son état de santé, aura donc un impact important sur la qualité du marché primaire et sur son utilisation.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux marchés secondaires puisque notre modélisation portera sur l'échange des actifs. Nous en distinguerons trois types différents : les marchés secondaires obligataires, les marchés secondaires boursiers et les marchés secondaires de devises.

Le marché secondaire obligataire est le marché sur lequel sont échangées (achetées et vendues) des obligations après leur émission. Une *obligation* est la fraction d'un emprunt contracté par un Etat, une entité assimilée à un Etat (une ville), ou une entreprise. Acheter une obligation correspond à prêter de l'argent afin de percevoir un intérêt. Les échéances et le montant des intérêts versés sont fixés par un contrat entre les deux parties [6]. Ces marchés sont dits "over-the-counter" (*OTC*), c'est-à-dire que leur viabilité est assurée par des teneurs de marché. Le teneur de marché est une tierce personne qui intervient lors d'un échange entre deux investisseurs. Celle-ci achète à l'investisseur qui souhaite vendre et revend l'actif au second (en s'assurant un certain bénéfice). Un exemple concret non financier d'un teneur de marché est un vendeur de voiture d'occasion.

Le marché secondaire boursier (*la bourse*) est celui où des actions sont échangées. Une *action* est la fraction du capital que possède une entreprise dont la personne qui détient l'action est propriétaire. Cette personne espère recevoir chaque année une partie du bénéfice de l'entreprise sous forme de *dividende*.

L'organisation de la bourse est plus complexe que le marché obligataire car il en existe quatre formes différentes.

Premièrement, la bourse peut fonctionner comme un *marché de fixing*, c'est-à-dire suivant l'idée du commissaire priseur de WALRAS. Léon WALRAS (1834-1910), l'inventeur de ce concept, est un économiste français [11]. Le commissaire priseur propose un prix pour une certaine action ; en réponse, les personnes souhaitant acheter ou vendre cette action proposent la quantité qu'ils souhaiteraient acheter/vendre à ce prix. Selon cette quantité, le commissaire priseur adapte le

prix qu'il avait proposé et les acheteurs/vendeurs potentiels modifient également la quantité qu'ils souhaiteraient échanger. Ce schéma se reproduit un certain nombre de fois. Si un équilibre s'établit (offre = demande), alors il y a un échange entre le vendeur et l'acheteur. Le prix d'échange est le prix qui maximise la quantité échangée. La particularité de ce marché est qu'il n'est pas continu, les échanges ont lieu une fois (ou parfois deux) sur la journée. Avant l'ouverture du marché, les participants doivent soumettre leurs ordres, c'est-à-dire annoncer s'ils souhaitent vendre ou acheter. A une certaine heure fixée, le prix maximisant le volume pouvant être échangé est calculé et annoncé.

La bourse peut également avoir la même organisation qu'un *marché gouverné par les ordres*. Dans ce cas, il n'y a pas de teneur de marché. Les personnes qui souhaitent acheter des actions, fixent un ordre limite d'achat, c'est-à-dire une certaine quantité qu'elles souhaiteraient obtenir jusqu'à un certain prix (fixé à l'unité). De la même façon, les vendeurs fixent une certaine quantité à échanger à au moins un certain prix. L'ensemble des ordres limites non exécutés est placé dans un carnet d'ordre. Pour que ce marché fonctionne, il faut une activité soutenue.

La bourse peut finalement fonctionner sous forme de *marché à la criée* ou de la même manière qu'un marché secondaire obligataire, un marché OTC.

Le marché secondaire de devises est un marché interbancaire dans lequel, comme son nom l'indique, sont échangées des devises (€/ \$, ...). Il fonctionne comme un marché OTC.

Un des rôles d'un marché secondaire est d'assurer la *liquidité* des échanges. Nous savons que la quantité achetée/vendue influence le prix et réciproquement. Un marché est dit liquide s'il est possible d'y échanger rapidement des quantités importantes d'actifs sans perturber le prix d'échange [7]. Il est donc plus aisé de faire des échanges sur un marché liquide. La notion de liquidité est donc liée à une dimension de temps et de prix. Par exemple, pour la dimension de temps, un marché de fixing qui est discrétisé est moins liquide qu'un marché continu.

Chapitre 2

Modèle général

2.1 Modélisation de la formation des anticipations de prix d'un actif

Considérons une ville où un marché financier a lieu tous les jours. Ce dernier comprend à la fois le marché primaire et secondaire, les actifs y sont émis et peuvent par la suite y être échangés. Les participants du marché seront appelés "les agents". Emettons deux hypothèses de départ. Considérons d'une part qu'un certain nombre fixe N d'agents se rend quotidiennement sur le marché et, d'autre part qu'un seul actif peut être échangé par jour.

Chaque matin, lorsque le marché ouvre ses portes, l'actif a une valeur pour la journée. Tous les agents connaissent ce prix dès lors qu'il est annoncé. En fonction de ce prix, ils choisissent de vendre ou d'acheter un actif à d'autres agents. Ils peuvent aussi ne rien faire, c'est-à-dire ne pas participer au marché certains jours. Pour effectuer ce choix, ils doivent évaluer l'intérêt qu'ils ont à participer à un échange ou non. Pour cela, ils essayent d'anticiper le prix du lendemain avant que celui-ci ne soit connu.

Les agents ont le droit de se grouper afin d'organiser des actions communes, d'échanger des idées, de s'influencer l'un l'autre,... Par exemple, deux agents peuvent partager les anticipations qu'ils ont effectuées pour le lendemain afin de voir si elles sont proches. Nous appellerons ce phénomène *l'interaction sociale*.

Le prix de l'actif dépend donc, entre autres, des anticipations effectuées par les agents, qui, quant à elles, sont basées sur les prix antérieurs de l'actif et sur les résultats de leurs interactions sociales. Chaque agent considère chacun de ces deux éléments pour former son anticipation pour le jour suivant avec une proportion qui

lui est propre.

A l'inauguration du marché, le premier jour, chaque participant a un niveau de *bien-être*, un état,

$$W_0 > 0.$$

Cet état représente la richesse de l'agent. Cette richesse se compose principalement de deux éléments, une quantité d'actifs ayant chacun une certaine valeur et une quantité d'argent qui lui permettra d'effectuer des transactions. Cette dernière est la *liquidité* de l'agent :

$$L_0 \in]0, W_0].$$

Si cette quantité diminue à un point tel qu'elle se rapproche de zéro, l'agent ne peut plus interagir avec d'autres puisqu'il ne possède plus de monnaie pour effectuer un achat. Il est alors exclu du marché et remplacé par quelqu'un d'autre possédant à nouveau un niveau de bien-être W_0 et une certaine liquidité L_0 .

La valeur de l'ensemble des actifs que possède l'agent est

$$A_0 = W_0 - L_0.$$

Chaque journée où le marché est ouvert est comptée. L'inauguration est le jour zéro, $j = 0$, le lendemain, $j = 1$, et ainsi de suite.

Le marché secondaire que nous modélisons fonctionne comme un marché de fixing. Peu avant l'ouverture du marché du jour j , l'agent i choisit s'il va en priorité vendre ou acheter sur base de l'anticipation qu'il avait faite pour cette journée. Pour chaque agent i ($i \in \underline{N}$), nous noterons l'anticipation pour le jour j : $P_j^{a,i}$. Nous supposons que passer l'ordre d'achat ou de vente implique un certain coût, faible et fixe, que nous indiquerons par c et tel que $0 < c \ll 1$. Ce coût est appelé coût de transaction, il est le même pour tous les agents.

A l'heure où le marché ouvre ses portes le jour j , le prix P_j auquel seront échangés les actifs est annoncé. Il est alors connu de tous les agents. Ils ont la journée pour discuter avec leurs pairs, s'informer,... et, à la clôture du marché, effectuer leur transaction. Durant cette journée, ils calculent également leurs anticipations du prix des actifs pour le lendemain : P_{j+1}^a . Cette prévision leur permettra de choisir de participer ou non au marché le jour suivant. Ils participeront au marché si le gain attendu en fonction des anticipations est positif, c'est-à-dire, s'ils considèrent qu'ils ne feront pas de perte, i.e. si

$$|P_{j+1}^a - P_j| - c > 0. \quad (2.1)$$

L'agent i choisira d'acheter un actif si sa prévision pour le jour suivant est supérieure au prix d'échange actuel, c'est-à-dire si

$$P_{j+1}^{a,i} > P_j. \quad (2.2)$$

Puisqu'il suppose que le prix va augmenter, il est dans son intérêt d'acheter l'actif le jour j . Dans le cas contraire, si

$$P_{j+1}^{a,i} < P_j, \quad (2.3)$$

l'agent i choisira de vendre un actif avant que, selon lui, son prix ne chute.

Dans les deux cas, l'agent participera au marché le jour $j + 1$ si la plus value (ou moins value) supposée de l'actif est supérieure au coût de transaction c , i.e. si l'équation (2.1) est respectée.

Il existe deux raisons pour lesquelles les anticipations de prix des agents pour le jour $j+1$, P_{j+1}^a , diffèrent du prix auquel les actifs seront échangés ce jour là, P_{j+1} .

Premièrement, parce que les agents sont influencés par le passé du prix des actifs. Ils choisissent de donner un certain poids relatif α à cette information antérieure. Nous pourrions comparer cela à un raisonnement inductif. Ils adaptent leurs prévisions en fonction de cette information.

Deuxièmement, cette différence provient également du phénomène d'interaction sociale. Les agents choisissent de modifier ou non leurs anticipations en fonction de l'information provenant des autres agents. Lorsque deux agents se rencontrent, ils choisissent chacun d'englober l'information provenant de l'autre ou de la rejeter. Ils font ce choix en fonction de la proximité de l'information provenant de l'autre par rapport à l'information dont ils disposent. Si la différence d'information est plus petite qu'un seuil que nous noterons σ , i.e. si

$$|P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| < \sigma$$

l'agent prend en compte l'information extérieure. Cette part de la modélisation est inspirée de la théorie de dynamique d'opinion de DEFFUANT¹.

C'est en fonction de ces deux phénomènes que nous allons modéliser la formation des prévisions du prix des actifs.

1. G. WEISBUCH, G. DEFFUANT, F. AMBLARD, J-P. NADAL, "Meet, Discuss, and Segregate, 2022!", Wiley Periodicals, Vol. 7, No. 3, 2002, pp. 55-63.

Chaque jour, nous supposons qu'un certain nombre d'agents γN ($\gamma \in [0, 1]$) révisent leurs anticipations. La fraction d'agents $(1 - \gamma)N$ ne les révisent pas, et donc conservent leur anticipation antérieure.

Nous pouvons à présent écrire le résultat d'une rencontre entre deux agents i et k comme

$$P_{j+1}^{a,i} = \alpha P_j + (1 - \alpha) \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| \geq \sigma \\ (P_j^{a,i} + P_j^{a,k})/2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans le premier cas, l'information provenant de l'agent k se trouve à une distance supérieure au seuil σ fixé, l'agent i choisit de rejeter cette information et ne considère alors que l'information qu'il possède, c'est à dire son anticipation passée. Pour le jour suivant, $j + 1$, son anticipation sera composée du prix de l'actif le jour j et de son anticipation pour le jour j , avec des poids α et $(1 - \alpha)$ respectivement.

Dans le second cas, l'agent i choisit d'ajouter l'information provenant de k à l'information qu'il possède déjà. Son anticipation le jour $j + 1$ sera alors composée de αP_j , cette fois-ci, la partie provenant de l'anticipation antérieure sera composée à moitié de son anticipation antérieure et à moitié de celle de k , le tout avec un poids de $(1 - \alpha)$.

Rappelons l'ensemble des paramètres que nous avons défini :

- $\alpha \in [0, 1]$: le poids avec lequel chaque participant considère le prix du passé pour former son anticipation du prix (qui lui permettra de décider s'il participe au marché le jour suivant ou non).
- $\sigma \in [0, 1]$: le seuil en dessous duquel les agents prennent en compte les informations provenant d'autres agents
- $\gamma \in [0, 1]$: la fraction d'agents qui révisent leur prix pour un certain jour j .

Dans le chapitre 3, nous ferons varier l'ensemble des paramètres afin d'étudier dans quelle mesure ils influencent le prix des actifs.

2.2 Mécanisme de formation du prix

Nous émettons l'hypothèse que le marché est centralisé, cela signifie que tous les titres sont acheminés vers un point central sans influence de la concurrence. Le prix d'un bien est alors unique et répond de manière simple à l'excès de demande [2]. Par exemple, si un jour la demande est largement supérieure à la normale

(c'est-à-dire à la demande des jours précédents), le prix augmentera de manière naturelle. Cela peut être comparé à l'activité d'un marché de *fixing* avec la présence d'un commissaire-priseur.

Nous allons à présent étudier comment sont formés les prix de manière microscopique, c'est-à-dire en considérant les agents.

Nous sommes présents sur le marché le jour j et nous connaissons donc le prix de l'actif : P_j . Par contre, nous ne connaissons pas le prix de l'actif du lendemain, P_{j+1} . Tentons de le construire.

Nous savons que ce prix est formé par la loi de l'offre et de la demande, dans ce cas, il doit vérifier l'équation

$$n_A(x) = n_V(x) \quad (2.5)$$

où $n_A(x)$ est le nombre d'agents qui achètent des actifs au prix x et $n_V(x)$ est le nombre d'agents qui vendent des actifs au prix x .

La solution de cette équation n'est pas toujours unique. Cela s'explique par le fait que le marché comporte N participants, chacun possède une courbe d'offre ou de demande (selon qu'il est vendeur ou acheteur). Il existe alors différents équilibres auxquels des acheteurs ou vendeurs seraient d'accord de participer. Cela implique donc que le nombre d'agents souhaitant vendre ou acheter à ces équilibres n'est pas forcément égal.

Définissons P_{j+1}^* , la valeur moyenne de toutes les solutions de l'équation (2.5). Définissons également l'ajustement du prix β comme l'excès du nombre d'acheteurs ou de vendeurs à ce prix par rapport au nombre total de participants au marché :

$$\beta(x) = \frac{|n_A(x) - n_V(x)|}{N}$$

Le prix des actifs le jour $j + 1$ est fonction de P_{j+1}^* et de P_j avec un poids $\beta(P_j)$ et $(1 - \beta(P_j))$ respectivement :

$$P_{j+1} = \beta(P_j)P_{j+1}^* + (1 - \beta(P_j))P_j$$

Le prix est construit de cette façon afin d'éliminer le plus rapidement possible l'excès de demande ou d'offre. La vitesse d'ajustement dépend de la taille du déséquilibre, qui lui, dépend du nombre d'agents.

Voici un exemple de la construction du prix :

Dans notre modèle, le prix est normalisé, cependant, pour simplifier notre exemple nous prendrons un prix quelconque.

Considérons un marché avec 10 participants. Le prix actuel de l'actif est $P_j = 3$. Si le nombre d'acheteurs est une fonction de la forme

$$n_A(x) = x^2$$

et le nombre de vendeurs :

$$n_V(x) = 4x - 3.$$

On peut calculer la solution de $n_A(x) = n_V(x)$:

$$\begin{aligned} n_A(x) = n_V(x) &\Leftrightarrow x^2 = 4x - 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ou } x_2 = 3 \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$P_{j+1}^* = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

et

$$\beta(P_j) = \frac{|n_A(P_j) - n_V(P_j)|}{N} = \frac{|9 - 8|}{10} = \frac{1}{10}.$$

Grâce à ces éléments, nous pouvons calculer le prix du jour $j + 1$:

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= \beta(P_j)P_{j+1}^* + (1 - \beta(P_j))P_j \\ &= \frac{1}{10}.2 + \left(1 - \frac{1}{10}\right).3 \\ &= 2.9 \end{aligned}$$

Comme expliqué *supra*, chaque agent i qui choisit de participer au marché le jour j donne dans l'ordre une priorité de vente ou d'achat pour un actif. Le nombre d'échanges qui auront lieu sur le marché le jour j est alors $\min\{n_A(P_j), n_V(P_j)\}$.

Observons ce qui se passe au niveau du bien-être et de la liquidité des agents.

Si l'agent i a choisi de vendre le jour j , c'est-à-dire si selon son anticipation $P_{j+1} < P_j$, son bien-être pour le jour $j + 1$ sera :

$$\begin{aligned} W_{j+1}^i &= W_j^i + |P_{j+1} - P_j| - c \\ &= W_j^i + P_j - P_{j+1} - c \end{aligned}$$

Sa liquidité en $j + 1$ sera augmentée de P_j puisqu'un actif lui aura été payé, moins le coût de transaction :

$$L_{j+1}^i = L_j^i + P_j - c$$

Le raisonnement est le même en considérant l'agent i comme un acheteur ($P_{j+1} > P_j$). Il gagne P_{j+1} contre P_j en bien-être et sa liquidité est diminuée de P_j et de c .

$$\begin{aligned} W_{j+1}^i &= W_j^i + |P_{j+1} - P_j| - c \\ &= W_j^i + P_{j+1} - P_j - c \end{aligned}$$

et

$$L_{j+1}^i = L_j^i - P_j - c \tag{2.6}$$

Cela montre bien qu'un agent ne peut pas être que vendeur car, dans ce cas, son stock d'actifs s'épuiserait, ni uniquement acheteur car sinon sa liquidité (2.6) diminuerait à un point tel que l'agent serait exclu du marché et remplacé par un nouvel agent possédant un bien-être W_0 et une liquidité L_0 .

La figure 2.1 représente le marché le jour j pour un certain agent i de manière schématique.

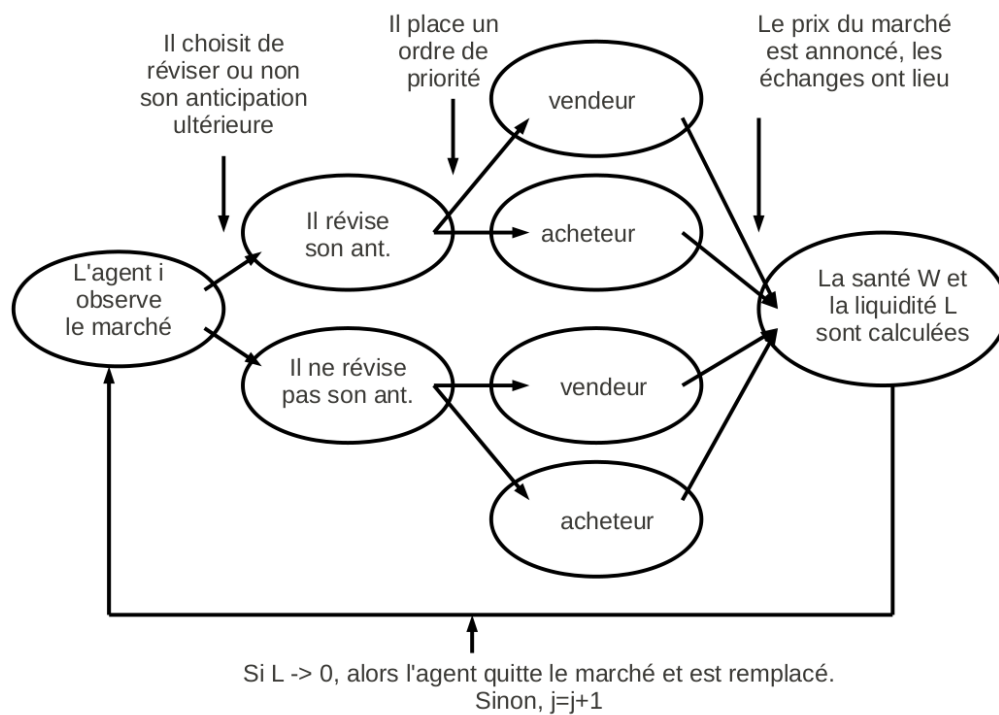


FIGURE 2.1 – Schéma du marché

2.3 Exemple

Imaginons un marché où 100 agents se rencontrent quotidiennement. Le jour d'ouverture du marché, leur anticipation est uniformément distribuée dans $[0, 1]$ et ils savent que le prix d'échange actuel (P_0) d'un actif est de 0.8. Le coût de transaction pour tous les agents est fixée à 0.005.

Nous avons fixé les paramètres de la façon suivante :

- $\gamma = 0.5$: Cela signifie que la moitié des agents révisent chaque jour leur anticipation, soit 50 d'entre eux.
- $\alpha = 0.5$: Les agents combinent les deux tendances pour former leur anticipation avec la même proportion.
- $\sigma = 0.5$: Si la différence entre l'information que possède un agent i et celle que possède un agent k est supérieure à 0.5, ils rejettent tous deux l'avis de l'autre. Par contre, si elle est inférieure à 0.5, ils englobent d'information de l'autre agent (en prenant la moyenne arithmétique entre les deux).

Avec ces valeurs, l'équation qui permet de calculer les anticipations (2.4) devient :

$$\begin{aligned} P_{j+1}^{a,i} &= \alpha P_j + (1 - \alpha) \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| \geq \sigma \\ (P_j^{a,i} + P_j^{a,k})/2 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= 0.5 P_j + (1 - 0.5) \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| \geq 0.5 \\ (P_j^{a,i} + P_j^{a,k})/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Observons graphiquement l'évolution des anticipations des agents en fonction du temps (figure 2.2).

Nous constatons, comme cela était prévu, que les anticipations au jour 0 sont distribuées dans $[0, 1]$. De plus, puisque les agents combinent les deux tendances pour former leurs anticipations, ils interagissent entre eux. Dans les cas où les agents englobent l'information provenant des autres, leur anticipation pour le lendemain est en partie formée par la moyenne arithmétique de l'anticipation actuelle de leur pair et la leur. Cela implique qu'au bout d'un certain temps, les anticipations convergent vers une valeur. C'est, en effet, ce que nous constatons graphiquement.

Observons à présent comment évolue le prix de l'actif en fonction du temps (figure 2.3) . Rappelons pour cela que le prix est formé suivant l'équation

$$P_{j+1} = \beta(P_j) P_{j+1}^* + (1 - \beta(P_j)) P_j.$$

Anticipation des agents en fonction du temps

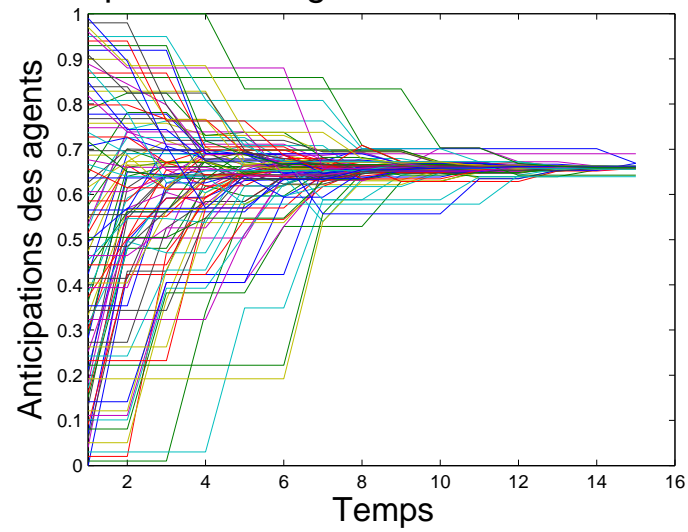


FIGURE 2.2 – Simulation de l'évolution des anticipations en fonction du temps

Prix du marche en fonction du temps

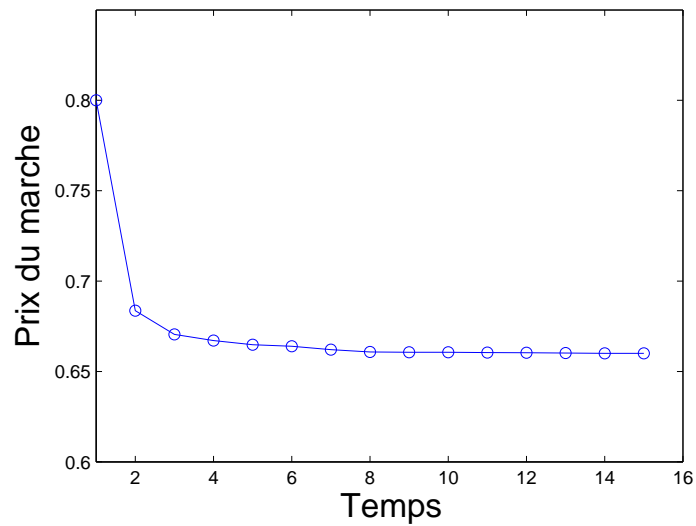


FIGURE 2.3 – Simulation de l'évolution du prix en fonction du temps

Nous constatons dans un premier temps que le marché se termine en 15 jours, cela signifie qu'il faut ce temps au prix pour converger. Le prix de départ était fixé à $P_0 = 0.8$. Nous constatons qu'il chute rapidement avant de se stabiliser à ~ 0.66 . Ce résultat était prévisible puisque pour le prix P_0 , il y a beaucoup plus de vendeurs que d'acheteurs étant donné que les anticipations sont uniformément distribuées. Dans l'équation de la formation du prix, le P_{j+1}^* sera inférieur à 0.8 afin d'égaliser le nombre d'acheteurs et de vendeurs. Ce phénomène explique la chute rapide du prix de l'actif. Les agents seront fortement influencés par cette chute, leurs anticipations se rapprocheront du prix, cela entraînera une stabilisation rapide de ce dernier.

Nous savons qu'un agent est acheteur si l'anticipation qu'il a faite du prix vérifie

$$P_{j+1}^{a,i} - P_j - c > 0$$

et vendeur si

$$P_j - P_{j+1}^{a,i} - c > 0$$

Observons combien d'agents sont répartis dans ces deux groupes chaque jour.

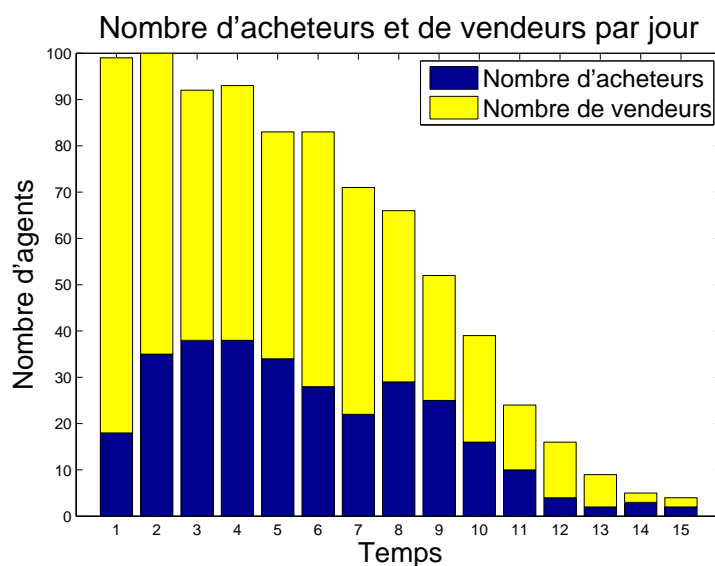


FIGURE 2.4 – Simulation de l'évolution du nombre d'acheteurs et de vendeurs sur le marché en fonction du temps

La figure 2.4 confirme l'analyse que nous avons effectuée sur l'évolution du prix. En effet, lorsque le prix est $P_0 = 0.8$, ± 80 agents souhaitent vendre alors que

seuls les 20 autres souhaitent acheter. Ceux qui, par contre, ont une anticipation trop proche du prix (proche de c), ne souhaitent pas participer au marché. Par l'action du commissaire priseur qui tente de diminuer la différence entre le nombre d'acheteurs et de vendeurs, le prix de l'actif chute fortement. Au fil des jours qui avancent, le nombre d'acheteurs et de vendeurs diminuent beaucoup. Cela provient du fait que certains agents arrivent à une anticipation égale au prix. Dans ce cas, il n'est plus dans leur intérêt de participer au marché, ils ne sont alors ni vendeurs, ni acheteurs.

Chapitre 3

Analyse selon la composante d'adaptation

Dans ce chapitre, nous considérons toujours qu'un seul actif est échangé par jour entre les agents. Nous émettons différentes hypothèses qui nous permettront d'étudier un large panel de possibilités.

Selon les valeurs attribuées aux différents paramètres, nous distinguerons deux situations. Lorsque cela sera possible, nous étudierons le prix et sa convergence de manière analytique. Dans ce cas de figure, nous confronterons graphiquement les résultats obtenus avec la simulation numérique afin d'observer à quel point ils s'en rapprochent. Par contre, dans la majorité des cas, seule la simulation numérique des résultats peut être effectuée (lorsque trop de paramètres différents sont pris en compte par exemple), nous analyserons alors les résultats obtenus. Pour cela, rappelons quelques définitions et situations que nous souhaitons mettre en avant.

Définitions et objectifs :

La valeur fondamentale d'un produit est sa valeur objective que le marché tente de refléter [3].

Si nous considérons que tous les agents ont une information non biaisée sur la valeur fondamentale des actifs, c'est-à-dire que l'information ne comporte pas d'erreur systématique due à l'observation incorrecte du phénomène [5], et que leur anticipation du prix initial (P_0^a) est distribuée uniformément dans $[0, 1]$, alors, la valeur fondamentale des actifs est $\frac{1}{2}$. Cette valeur n'est cependant pas connue par les agents car cela nécessiterait une information complète de ce que tous les autres pensent, ce qui n'est pas réaliste.

Nous allons étudier dans quelle mesure le prix des actifs tend vers la valeur fondamentale et lorsque ce n'est pas le cas, de quelle manière il est possible de caractériser cette déviation (notamment par rapport aux différentes valeurs des paramètres α , σ et γ).

Pour pouvoir analyser ces résultats, nous faisons l'hypothèse que le marché est composé d'un grand nombre de participants et que chacun d'eux a un niveau de bien-être élevé et une grande liquidité (cela nous permet de limiter la fréquence d'interchangement des individus).

Nous avons vu précédemment que, pour construire leurs anticipations, les agents combinent deux tendances différentes. Ces tendances sont, d'une part, de suivre le prix (passé) du marché et, d'autre part, de suivre l'information provenant d'autres agents. C'est le paramètre α qui détermine dans quelle proportion les agents préfèrent l'une ou l'autre tendance. Nous allons étudier la convergence du prix des actifs en considérant les deux cas séparément, c'est-à-dire si les agents suivent uniquement le prix du passé ($\alpha = 1$) ou s'ils se basent uniquement sur l'interaction sociale ($\alpha = 0$). Ensuite, nous les combinerons en faisant varier α dans l'intervalle $]0, 1[$.

3.1 Anticipation par adaptation totale du prix passé

Plaçons nous tout d'abord dans le cas où $\alpha = 1$, c'est-à-dire dans le cas où l'agent considère uniquement le prix des actifs actuels pour construire sa prévision du lendemain. D'après l'équation (2.4), nous avons

$$P_{j+1}^{a,i} = P_j \quad \forall j \quad \text{avec } i \in \{1, \dots, \gamma N\} \quad (3.1)$$

De plus, si nous considérons que tous les agents révisent leurs anticipations, c'est-à-dire que $\gamma = 1$, dans ce cas, l'équation (3.1) devient valable pour tous les agents, nous pouvons alors écrire :

$$P_{j+1}^{a,i} = P_j \quad \forall j \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Nous ne donnons pas de valeur particulière au paramètre σ puisqu'il ne rentre pas en compte dans la formation des anticipations lorsque $\alpha = 1$.

Nous nous trouvons dans la situation où, au prix P_j , le marché comportera autant d'acheteurs que de vendeurs car nous considérons que, puisque nous avons une égalité entre l'anticipation et le prix actuel, la moitié des agents participant au marché choisira de vendre, tandis que l'autre moitié choisira d'acheter. Autrement dit,

$$n_A(P_j) = n_V(P_j),$$

et donc

$$P_{j+1}^* = P_j.$$

Cela nous permet de calculer l'ajustement du prix en P_j :

$$\beta(P_j) = \frac{|n_A(P_j) - n_V(P_j)|}{N} = 0.$$

Le prix des actifs pour le jour $j + 1$ sera donné par

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= \beta(P_j)P_{j+1}^* + (1 - \beta(P_j))P_j \\ &= P_j. \end{aligned}$$

Puisque le prix des actifs reste constant au fil des jours, il est égal au prix du jour de l'inauguration ($j = 0$),

$$P_j = P_0 \quad \forall j.$$

A chaque période, l'ensemble des agents révisé ses anticipations en les substituant par P_0 . Il n'y a pas d'évolution du prix des actifs. Si nous représentons le prix des actifs en fonction du temps, cela correspondrait à une droite horizontale. Pour que le prix des actifs soit proche de la valeur fondamentale, il faut donc que le prix initial P_0 le soit.

Nous considérons maintenant que seulement la fraction γN d'agents révisent leur anticipation avec $\gamma < 1$ et α toujours égal à 1. Par hypothèse, puisque N est grand, nous pouvons déduire que γN l'est aussi.

Le prix initial P_0 n'est pas systématiquement égal à la valeur fondamentale de l'actif, nous pouvons supposer, sans perdre de généralité que $P_0 > \frac{1}{2}$. (Nous pourrions utiliser des raisonnements identiques en considérant $P_0 < \frac{1}{2}$.)

Pour étudier la construction du prix avec ces valeurs de paramètres, nous avons besoin de deux propositions.

Proposition 3.1.0.1 *Considérons que l'ensemble des N agents participant au marché est divisé en deux groupes distincts :*

- * N_1 : l'ensemble des agents dont les anticipations sont uniformément distribuées sur $[0, 1]$.
- * N_2 : l'ensemble des agents dont l'anticipation est constante et égale à $\hat{P} \in (0, 1)$.

Nous considérons que $N_2 \gg N_1$. Dans ce cas, le prix hypothétique P^* solution de

$$n_A(x) = n_V(x)$$

vaut

$$P^* = \begin{cases} \hat{P} - c & \text{si } \hat{P} > \frac{1}{2} \\ \hat{P} + c & \text{si } \hat{P} < \frac{1}{2} \\ \hat{P} & \text{si } \hat{P} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Démonstration

Démontrons pour commencer cette proposition dans le cas où $\hat{P} > \frac{1}{2}$.

Nous cherchons donc à montrer que si

$$\hat{P} > \frac{1}{2} \quad \text{alors} \quad P^* = \hat{P} - c$$

Pour cela, nous définissons deux fonctions :

$$\theta_c(x, P) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > P + c \\ 0 & \text{si } x \leq P + c \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \eta_c(x, P) &= 1 - \theta_{-c}(x, P) \\ &= 1 - \begin{cases} 1 & \text{si } x > P - c \\ 0 & \text{si } x \leq P - c \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq P - c \\ 0 & \text{si } x > P - c \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque nous avons émis l'hypothèse que N est très grand, comme $N_2 \gg N_1$, N_2 est aussi grand.

Dans ce cas, nous pouvons calculer le nombre d'acheteurs et de vendeurs à un prix quelconque $x \in [0, 1]$.

Soit tous les agents de N_2 choisissent de vendre, soit ils choisissent tous d'acheter. Le groupe N_1 , lui peut être divisé. Rappelons qu'un certain agent i choisira de vendre si

$$P_{j+1}^{a,i} < P_j \quad \text{et} \quad |P_{j+1}^{a,i} - P_j| > c$$

ou il choisira d'acheter dans le cas où

$$P_{j+1}^{a,i} > P_j \quad \text{et} \quad |P_{j+1}^{a,i} - P_j| > c.$$

La figure 3.1 représente la manière dont les agents appartenant à N_1 vont se positionner en tant qu'acheteurs ou vendeurs selon l'anticipation qu'ils ont envisagée.

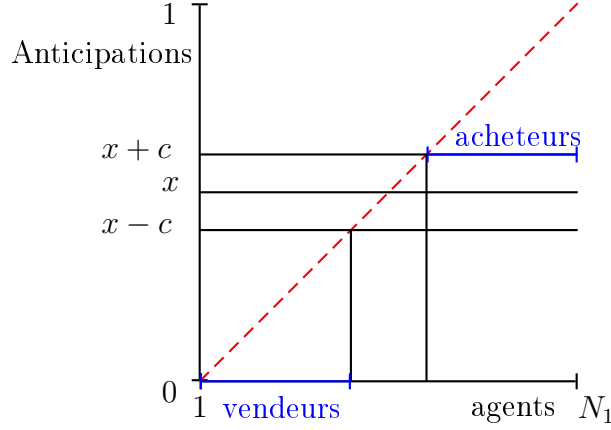


FIGURE 3.1 – Représentation de la position des agents de N_1

La fraction des agents de N_1 qui participeront au marché en tant qu'acheteurs sont ceux dont l'anticipation est supérieure à x d'au moins c , ils seront donc

$$(1 - (x + c))N_1$$

agents à acheter sur le marché. Tous les agents de N_2 participeront si

$$\begin{aligned} \hat{P} - x - c \geq 0 &\Leftrightarrow \hat{P} - c \geq x \\ &\Leftrightarrow \eta_c(x, \hat{P}) = 1. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$n_A(x) = (1 - x - c)N_1 + \eta_c(x, \hat{P})N_2$$

Dans le cas contraire, les vendeurs de N_1 au prix x seront ceux dont l'anticipation est suffisamment loin de x inférieurement. La proportion de vendeurs de N_1 au prix x est alors $(x - c)N_1$. L'ensemble des agents de N_2 vendra si

$$\begin{aligned} x - \hat{P} - c > 0 &\Leftrightarrow x > \hat{P} + c \\ &\Leftrightarrow \theta_c(x, \hat{P}) = 1. \end{aligned}$$

Nous observons :

$$n_V(x) = (x - c)N_1 + \theta_c(x, \hat{P})N_2.$$

Nous pouvons à présent calculer la différence entre le nombre d'acheteurs et de vendeurs :

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= n_A(x) - n_V(x) \\ &= (1 - x - c)N_1 + \eta_c(x, \hat{P})N_2 - ((x - c)N_1 + \theta_c(x, \hat{P})N_2) \\ &= (1 - x - c - (x - c))N_1 + (\eta_c(x, \hat{P}) - \theta_c(x, \hat{P}))N_2 \\ &= (1 - 2x)N_1 + (\eta_c(x, \hat{P}) - \theta_c(x, \hat{P}))N_2. \end{aligned}$$

Nous cherchons à calculer P^* qui est la valeur de x qui annule l'équation ci-dessus. P^* correspond donc à la valeur de x quand l'équation change de signe. Nous allons montrer que cette valeur est $\hat{P} - c$. Nous avons émis les hypothèses $\hat{P} > \frac{1}{2}$ et $N_2 \gg N_1$.

Calculons $\Delta(x)$ en considérant $x > \hat{P} + c$:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= (1 - 2x)N_1 + (\eta_c(x, \hat{P}) - \theta_c(x, \hat{P}))N_2 \\ &= (1 - 2x)N_1 + (0 - 1)N_2 \\ &= (1 - 2x)N_1 - N_2. \end{aligned}$$

Puisque $N_2 \gg N_1$, nous avons

$$\Delta(x) < 0 \quad \text{si } x > \hat{P} + c.$$

Calculons ensuite $\Delta(x)$ lorsque $\hat{P} - c < x < \hat{P} + c$:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= (1 - 2x)N_1 + (\eta_c(x, \hat{P}) - \theta_c(x, \hat{P}))N_2 \\ &= (1 - 2x)N_1 + (0 - 0)N_2 \\ &= (1 - 2x)N_1 \\ &< (1 - 2\hat{P} - 2c)N_1 \text{ car } x < \hat{P} + c. \end{aligned}$$

Avec $\hat{P} > \frac{1}{2}$ et c est positif, $\Delta(x)$ est encore négatif.

Par contre, avec $x < \hat{P} - c$, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= (1 - 2x)N_1 + (\eta_c(x, \hat{P}) - \theta_c(x, \hat{P}))N_2 \\ &= (1 - 2x)N_1 + (1 - 0)N_2 \\ &= (1 - 2x)N_1 + N_2 \end{aligned}$$

qui est positif puisque $N_2 \gg N_1$.

Nous avons montré que $x = \hat{P} - c$ change le signe de l'équation $\Delta(x)$, et donc que

$$P^* = \hat{P} - c.$$

Dans le cas où $\hat{P} < \frac{1}{2}$, il faut montrer que $P^* = \hat{P} + c$. La démonstration se fait de manière analogue à celle où $\hat{P} > \frac{1}{2}$. En posant les mêmes fonctions $\theta_c(x, \hat{P})$ et $\eta_c(x, \hat{P})$, nous obtenons à nouveau l'équation

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= n_A(x) - n_V(x) \\ &= (1 - 2x)N_1 + (\eta_c(x, \hat{P}) - \theta_c(x, \hat{P}))N_2. \end{aligned}$$

Si $x > \hat{P} + c$, nous avons, comme précédemment

$$\Delta(x) = (1 - 2x)N_1 - N_2 < 0 \text{ car } N_2 \gg N_1.$$

Par contre, si $\hat{P} - c < x < \hat{P} + c$:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= (1 - 2x)N_1 \\ &> (1 - 2\hat{P} + 2c)N_1 \\ &> 0 \text{ car } \hat{P} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'équation $\Delta(x)$ change de signe lorsque $x = \hat{P} + c$, donc

$$P^* = \hat{P} + c \text{ si } \hat{P} < \frac{1}{2}.$$

Grâce aux deux cas montrés précédemment, le cas $\hat{P} = \frac{1}{2}$ est trivial. Nous avons

$$P^* = \hat{P} = \frac{1}{2}.$$

□

De cette proposition se déduit :

Proposition 3.1.0.2 *Si nous ajoutons aux groupes d'agents N_1 et N_2 de la proposition 3.1.0.1 un nouveau groupe N_3 représentant les agents dont l'anticipation des prix est \tilde{P} telle que*

$$|\tilde{P} - \hat{P}| < c.$$

Alors, la valeur de P^ ne change pas, c'est-à-dire,*

$$P^* = \begin{cases} \hat{P} - c & \text{si } \hat{P} > \frac{1}{2} \\ \hat{P} + c & \text{si } \hat{P} < \frac{1}{2} \\ \hat{P} & \text{si } \hat{P} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Démonstration

La démonstration de cette proposition est triviale grâce à la proposition 3.1.0.1. Les agents appartenant au groupe N_3 , ont des anticipations similaires à celles des agents du groupe N_2 . De ce fait, ils engendrent des contraintes semblables pour se positionner comme acheteurs ou vendeurs. Les résultats sont donc identiques.

□

Montrons à présent que dans le cas $\alpha = 1$ et $\gamma < 1$, le marché à long-terme tend vers un équilibre, c'est à dire que la déviation du prix par rapport à la valeur fondamentale est bornée.

Si on considère la première période du marché, le prix P_0 est connu. La fraction $(1 - \gamma)N$ d'agents ne révisent pas leur anticipation. Ces agents correspondent à ceux dont les anticipations sont uniformément distribuées dans $[0, 1]$ (i.e N_1) de la proposition 3.1.0.1. Par contre, la partie γN des agents qui modifie leur anticipation remplace celle-ci par le prix de la période antérieure puisque $\alpha = 1$,

$$P_1^{a,i} = P_0 \quad \forall i \in \gamma N$$

Puisque cette anticipation est une constante, la fraction d'agents qui révisent leur anticipation correspond à N_2 . De la proposition 3.1.0.1, nous savons que

$$P_1^* = P_0 - c \quad \text{car } P_0 > \frac{1}{2}.$$

Nous pouvons à présent calculer le déséquilibre de marché en P_0 . Pour calculer $n_A(P_0)$, nous considérons que le nombre d'acheteurs est l'ensemble des agents dont l'anticipation vérifie les équations (2.1) et (2.2) simultanément parmi ceux qui ne révisent pas leur anticipation. Nous procédons de la même manière pour calculer $n_V(P_0)$ avec les équations (2.1) et (2.3).

$$\begin{aligned} \beta(P_0) &= \frac{|n_A(P_0) - n_V(P_0)|}{N} \\ &= \frac{|(1 - P_0 - c)N(1 - \gamma) - (P_0 - c)N(1 - \gamma)|}{N} \\ &= |1 - 2P_0|(1 - \gamma) \\ &= (2P_0 - 1)(1 - \gamma) \quad \text{car } P_0 > \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ensuite, nous pouvons calculer le prix des actifs pour la période suivante

$$\begin{aligned}
P_1 &= \beta(P_0)P_1^* + (1 - \beta(P_0))P_0 \\
&= (2P_0 - 1)(1 - \gamma)(P_0 - c) + (1 - (2P_0 - 1)(1 - \gamma))P_0 \\
&= (2P_0 - 1 - \gamma 2P_0 + \gamma)(P_0 - c) + P_0 - 2P_0^2 + P_0 + \gamma 2P_0^2 - \gamma P_0 \\
&= 2P_0^2 - P_0 - \gamma 2P_0^2 + \gamma P_0 - 2P_0c + c + \gamma 2P_0c - c\gamma + P_0 - 2P_0^2 + \\
&\quad P_0 + \gamma 2P_0^2 - \gamma P_0 \\
&= -2P_0c + c + \gamma 2P_0c - c\gamma + P_0 \\
&= P_0 + c(-2P_0 + 1 + \gamma 2P_0 - \gamma)
\end{aligned}$$

or,

$$-2P_0 + 1 + \gamma 2P_0 - \gamma = -\beta(P_0)$$

donc,

$$P_1 = P_0 - c\beta(P_0)$$

Ce nouveau prix est proche de P_0 puisque c est petit. Le déséquilibre du marché ($\beta(P_0)$) le premier jour est donc faible lui aussi.

Considérons à présent le deuxième jour. La même proportion d'agents modifie et ne modifie pas ses anticipations, γN et $(1 - \gamma)N$ respectivement. Nous pouvons, dans ce cas-ci, reconstituer les groupes de la proposition 3.1.0.2 afin de pouvoir l'appliquer.

Comme cela est montré à la figure 3.2, nous avons :

- * $N_1 = (1 - \gamma)^2 N$: les agents qui ne révisent pas leurs anticipations (ni à la première période, ni à la seconde). Cette anticipation est donc distribuée uniformément dans $[0, 1]$ (hypothèse de départ).
- * $N_2 = \gamma(1 - \gamma)N$: les agents qui ont une anticipation constante, $P_2^{a,i} = P_1^{a,i} = P_0$. Ce sont les agents qui ont révisé leur anticipation le premier jour, mais pas le second.
- * $N_3 = \gamma^2 N + \gamma(1 - \gamma)N = \gamma N$: les agents qui ont une anticipation très proche de celle des agents du groupe N_2 , c'est-à-dire, $P_2^{a,i} = P_1 = P_0 - \beta(P_0)c$.

Cette anticipation pour les agents du groupe N_3 vérifie bien les hypothèses de la proposition 3.1.0.2. Montrons que $|P_2^{a,i,N_3} - P_2^{a,i,N_2}| < c$:

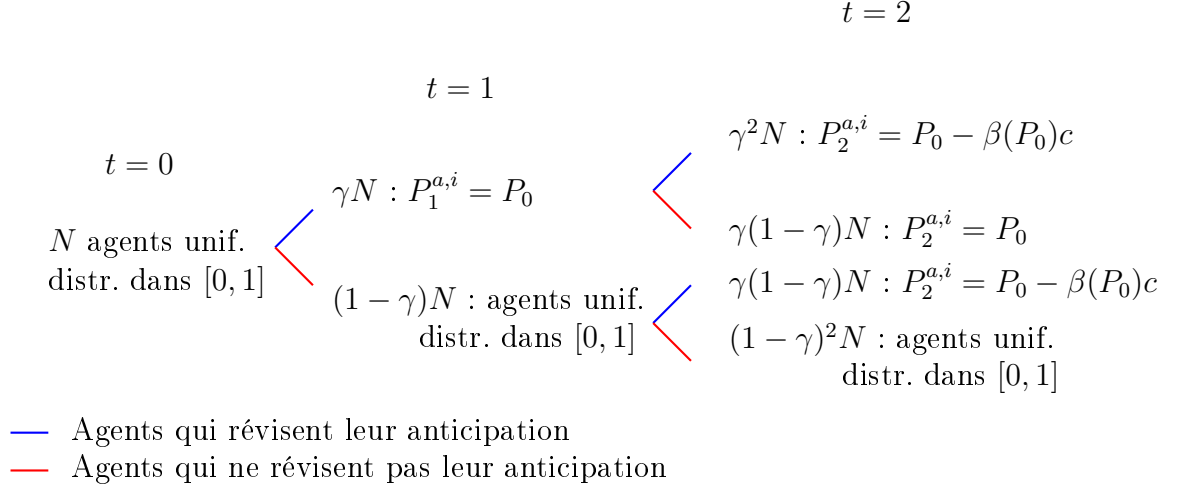


FIGURE 3.2 – Répartition des agents selon leurs anticipations

$$\begin{aligned}
 |P_2^{a,i,N_3} - P_2^{a,i,N_2}| < c &\Leftrightarrow |P_0 - \beta(P_0)c - P_0| < c \\
 &\Leftrightarrow |-\beta(P_0)c| < c \\
 &\Leftrightarrow |-\beta(P_0)| < 1 \\
 &\Leftrightarrow |\beta(P_0)| < 1.
 \end{aligned}$$

Or, nous avons montré que le déséquilibre de marché est très faible (3.2). Nous pouvons en déduire que

$$|\beta(P_0)| < 1.$$

Nous pouvons à présent appliquer la proposition 3.1.0.2 et observer que

$$P_2^* = P_0 - c.$$

Le déséquilibre de marché, lui, est caractérisé par

$$\begin{aligned}
 \beta(P_1) &= \frac{|n_A(P_1) - n_V(P_1)|}{N} \\
 &\sim (1 - \gamma)^2.
 \end{aligned}$$

parce que seuls les agents de N_1 participeront au marché. L'anticipation des agents des autres groupes ne vérifie pas l'équation

$$|P_{j+1}^{a,i} - P_j| > c.$$

Calculons alors le prix de la période suivante

$$\begin{aligned}
P_2 &= \beta(P_1)P_2^* + (1 - \beta(P_1))P_1 \\
&\sim (1 - \gamma)^2(P_0 - c) + (1 - (1 - \gamma)^2)(P_0 - c\beta(P_0)) \\
&\sim P_0 - 2\gamma P_0 + \gamma^2 P_0 - c + 2\gamma c - \gamma^2 c + (2\gamma - \gamma^2)(P_0 - c\beta(P_0)) \\
&\sim P_0 - c + 2\gamma c - \gamma^2 c - c\beta(P_0)2\gamma + \gamma^2 c\beta(P_0) \\
&\sim P_0 - c(1 - 2\gamma + \gamma^2 + \beta(P_0)2\gamma - \gamma^2\beta(P_0)) \\
&\sim P_0 - c\beta(P_0) + \Theta(1 - \gamma)^2 \\
&\sim P_0 - c(1 - \gamma) + \Theta(1 - \gamma)^2
\end{aligned}$$

On constate encore une fois que le prix reste proche du prix initial. De plus, lorsque les jours passent, seul le dernier terme peut varier puisque les autres sont indépendants de j . Or, ce dernier terme est suffisamment petit pour être négligé. Le prix suit

$$P_j \sim P_0 - c(1 - \gamma). \quad (3.3)$$

Ce résultat est représenté à la figure 3.3, en comparaison avec la simulation numérique de la situation similaire. Nous constatons que la résolution analytique est proche de la simulation. Ce phénomène se renforce plus γ est proche de 1.

Au fil des jours, une proportion γN d'agents révisent leur anticipation et celle-ci devient P_0 . Le prix du marché convergera donc lorsque tous les agents auront révisé au moins une fois leur anticipation.

Si on considère le cas extrême, c'est à dire qu'à chaque période, ce sont les mêmes γN agents qui révisent leurs anticipations et donc les mêmes $(1 - \gamma)N$ agents qui ne les révisent pas, nous cherchons le nombre de jours après lesquels le nombre d'agents n'ayant pas révisé leurs anticipations est minimale, par exemple, un seul agent. Si nous considérons que cela arrive le k ème jour, nous obtenons

$$(1 - \gamma)^k N = 1.$$

Résolvons cette équation afin de trouver le nombre de jours nécessaires pour que le prix converge.

$$\begin{aligned}
(1 - \gamma)^k N = 1 &\Leftrightarrow \log(1 - \gamma)^k N = 0 \\
&\Leftrightarrow k \log(1 - \gamma) = -\log N \\
&\Leftrightarrow k = \frac{-\log N}{\log(1 - \gamma)}. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

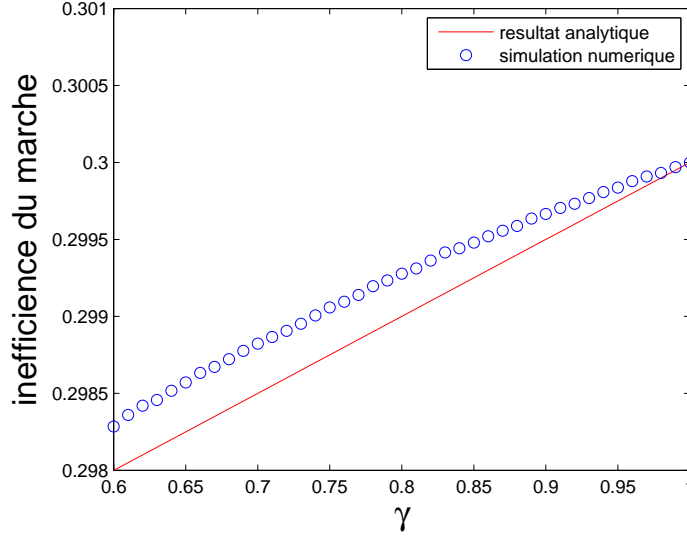


FIGURE 3.3 – Efficience du marché selon γ avec $\alpha = 1$. Valeurs des paramètres : $N = 1000$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$. La ligne continue : résultat analytique (3.3). Ronds : simulation numérique (50 simulations).

Ce résultat est confirmé à la figure 3.4. En effet, les résultats obtenus pour chaque γ suivent bien la courbe dessinée par l'équation 3.4 calculée analytiquement.

3.2 Anticipation basée sur l'interaction sociale

Rappelons comment sont formées les anticipations des différents agents :

$$P_{j+1}^{a,i} = \alpha P_j + (1 - \alpha) \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| > \sigma \\ \frac{P_j^{a,i} + P_j^{a,k}}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans cette partie, nous allons considérer le cas où seules les interactions sociales entre agents interviennent pour la formation de l'anticipation suivante. Cela correspond au cas où $\alpha = 0$. Deux cas sont alors à traiter, si l'agent rejette l'information venant d'autres ou s'il choisit de l'englober, cela dépend du seuil σ de l'agent, ces comportements définissent la confirmation des tendances. C'est ce paramètre que nous ferons varier pour étudier les différents comportements possibles.

Lorsque σ est petit, i.e $\sigma \ll 1$, l'agent a tendance à rejeter plus vite l'information extérieure, nous appellerons ce comportement comme étant une "forte

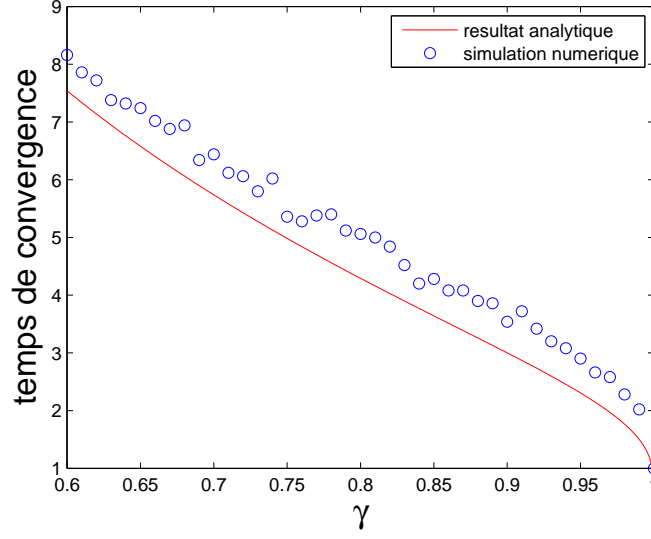


FIGURE 3.4 – Temps de convergence du prix du marché (vers l'état stable) selon γ avec $\alpha = 1$. Valeurs des paramètres : $N = 1000$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$. Ligne continue : résultat analytique (3.4). Ronds : simulation numérique (50 simulations).

confirmation des tendances". Cette appellation provient de la définition du *biais de confirmation* : $(1 - \sigma)$. Dans le cas contraire, $\sigma \sim 1$, l'agent agit avec "faible confirmation des tendances". Nous allons étudier et détailler ces deux comportements séparément.

3.2.1 Forte confirmation des tendances : $\sigma \ll 1$

Considérons qu'une rencontre entre deux agents a lieu dans le but d'échanger de l'information. Puisque nous nous trouvons dans le cas où le seuil (en dessous duquel les agents englobent les idées extérieures) est petit, les agents vont, tous les deux, rejeter l'information de l'autre et donc ne considérer que l'information qu'ils possédaient antérieurement pour construire leur nouvelle anticipation.

Nous supposons toujours que γN agents révisent leurs anticipations alors que $(1 - \gamma)N$ les conservent. Seuls ceux qui ont l'intention d'adapter leurs anticipations, i.e la fraction γN d'agents, vont entrer en contact avec d'autres agents pour tenter d'obtenir une nouvelle information. Puisque nous sommes dans le cas où la confirmation des tendances est forte, tous ces γN agents vont rejeter l'information

des autres. Cela correspond au cas où ils ne révisent pas leur anticipation.

$$\begin{aligned}
P_{j+1}^{a,i} &= \alpha P_j + (1 - \alpha) \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| > \sigma \\ (P_j^{a,i} + P_j^{a,k})/2 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= 0P_j + (1 - 0) \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| > \sigma \\ (P_j^{a,i} + P_j^{a,k})/2 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \sigma \ll 1 \\
&= P_j^{a,i}
\end{aligned}$$

Cela implique que tous ces agents conservent leurs anticipations antérieures pour le jour suivant. Leurs anticipations sont donc à chaque période uniformément distribuées dans $[0, 1]$ puisque leur première anticipation l'était.

La fraction $(1 - \gamma)N$ d'agents qui ne révisent pas leur anticipation ont donc une anticipation uniformément distribuée dans $[0, 1]$ à chaque période puisque cette fois encore elle l'était au départ.

Tous les N agents ont donc une anticipation uniformément distribuée dans $[0, 1]$.

Calculons à présent la moyenne de toutes les anticipations, notons-la \tilde{P}^a . Puisque personne ne modifie son anticipation, elle reste identique entre le jour j et le jour $j + 1$:

$$\tilde{P}_{j+1}^a = \tilde{P}_j^a.$$

Au départ nous avons fait l'hypothèse que les anticipations des agents étaient distribuées uniformément dans $[0, 1]$. Nous obtenons que

$$\tilde{P}_0^a = \frac{1}{2}$$

et donc pour tous les jours

$$\tilde{P}_{j+1}^a = \tilde{P}_j^a = \frac{1}{2}.$$

Observons à la figure 3.5 comment les agents se répartissent en tant qu'acheteurs ou vendeurs lors de la première période du marché selon les anticipations qu'ils ont effectuées pour le jour suivant.

Nous pouvons conclure que $(x - c)N$ agents choisiront de vendre alors que

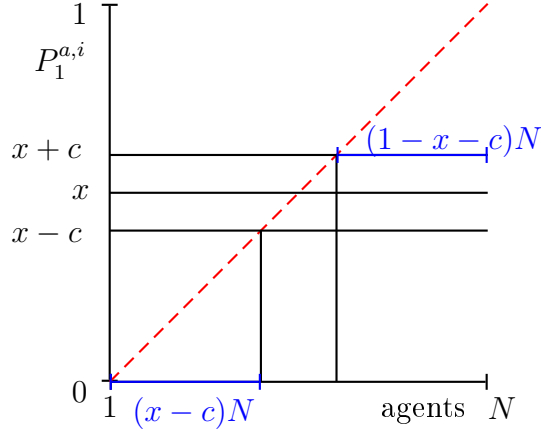


FIGURE 3.5 – Représentation de la position des agents le premier jour du marché

$(1 - x - c)N$ agents choisiront d'acheter. Nous pouvons donc calculer P_1^* :

$$\begin{aligned}
 n_v(x) = n_A(x) &\Leftrightarrow (x - c)N = (1 - x - c)N \\
 &\Leftrightarrow x = 1 - x \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow P_1^* = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse des anticipations uniformément distribuées, nous pouvons déduire que le prix qui satisfera l'équation (2.5) est aussi $\frac{1}{2}$, $\forall j$:

$$P_{j+1}^* = \tilde{P}_{j+1}^a = \frac{1}{2}.$$

Plaçons-nous à nouveau à la première période, le déséquilibre du marché est

$$\begin{aligned}
 \beta(P_0) &= \frac{|n_A(P_0) - n_V(P_0)|}{N} \\
 &= \frac{|(1 - P_0 - c)N - (P_0 - c)N|}{N} \\
 &= |1 - 2P_0|.
 \end{aligned}$$

Le prix du marché à la période 1 sera alors

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \beta(P_0)P_1^* + (1 - \beta(P_0))P_0 \\
 &= \frac{|1 - 2P_0|}{2} + (1 - |1 - 2P_0|)P_0 \\
 &= P_0 + |1 - 2P_0|(\frac{1}{2} - P_0) \\
 &= P_0 + |1 - 2P_0|\frac{(1 - 2P_0)}{2}.
 \end{aligned}$$

Puisque les anticipations restent uniformément distribuées dans $[0, 1]$ à chaque période, nous pouvons généraliser ce résultat pour tous les jours où le marché est ouvert. Nous avons

$$\beta(P_j) = |1 - 2P_j|$$

et

$$P_{j+1} = P_j + |1 - 2P_j|\frac{(1 - 2P_j)}{2}.$$

Nous obtenons une solution différente si le prix de la période actuelle est supérieur ou inférieur à $\frac{1}{2}$. Si $P \geq \frac{1}{2}$, nous avons,

$$P_{j+1} = P_j - \frac{(2P_j - 1)^2}{2}$$

et si $P < \frac{1}{2}$,

$$P_{j+1} = P_j + \frac{(2P_j - 1)^2}{2}.$$

Ces résultats nous permettent de construire une fonction, représentant l'évolution du marché de manière dynamique :

$$f(P) = \begin{cases} P - \frac{(2P-1)^2}{2} & \text{si } P \geq \frac{1}{2} \\ P + \frac{(2P-1)^2}{2} & \text{si } P < \frac{1}{2} \end{cases}$$

et donc,

$$P_{j+1} = f(P_j).$$

Montrons que ce mapping a un point fixe en $\frac{1}{2}$.

Un *point fixe* x^* est un point appartenant au domaine de définition de la fonction et qui vérifie

$$f(x^*) = x^*.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 f(P_j^*) = P_j^* &\Leftrightarrow P_j^* \pm \frac{(2P_j^* - 1)^2}{2} = P_j^* \\
 &\Leftrightarrow \pm \frac{(2P_j^* - 1)^2}{2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow P_j^* = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

De plus, si f est une fonction continûment différentiable et x^* est un point fixe de f , alors, ce point fixe est dit *asymptotiquement stable* si

$$|f'(x^*)| < 1,$$

et *asymptotiquement instable* si

$$|f'(x^*)| > 1.$$

Dans le cas où $|f'(x^*)| = 1$, nous dirons que le point fixe est *indifférent*. Nous pouvons alors étudier s'il est attracteur ou répulseur[8].

Etudions la stabilité de ce point fixe.

$$\begin{aligned}
 f'(P_j^*) &= (P_j^* \pm \frac{(2P_j^* - 1)^2}{2})' \\
 &= 1 \pm \frac{2}{2}(2P_j^* - 1)2 \\
 &= 1 \pm (4P_j^* - 2)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 f'(\frac{1}{2}) &= 1 \pm (4(\frac{1}{2}) - 2) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Nous ne pouvons donc pas déduire sa stabilité. Cependant, si nous représentons graphiquement l'expression $P_j - \frac{1}{2}$ en fonction du temps ainsi que le logarithme de cette formule, nous obtenons les graphes représentés à la figure 3.6.

Le graphe de gauche, nous montre que

$$P_j - \frac{1}{2} \sim \frac{a}{j^b}$$

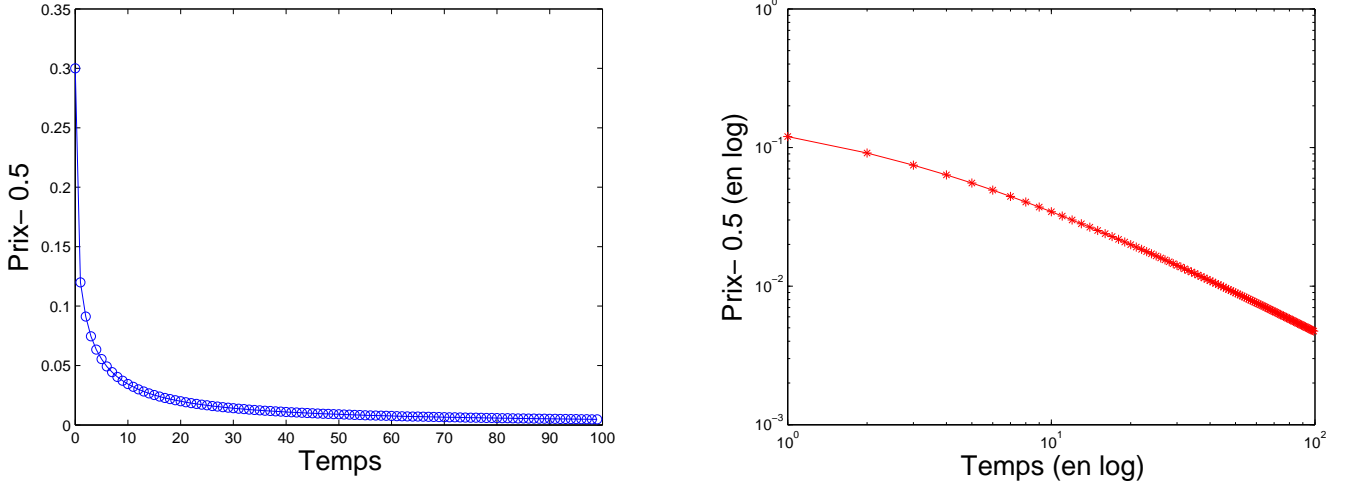


FIGURE 3.6 – Gauche : prix analytique en fonction du temps. Droite : logarithme du prix en fonction du temps. Valeurs des paramètres : $P_0 = 0.8$.

Si on considère le logarithme de ces deux expressions (représenté sur le graphe de droite), nous obtenons l'équivalent d'une droite de paramètres a et b :

$$\log(P_j - \frac{1}{2}) \sim \log(a) - b \log(j)$$

Cette simulation numérique nous permet d'évaluer que $b = 1$ et que a est petit. Grâce à cela, nous pouvons conclure que

$$P_j - \frac{1}{2} \sim \frac{a}{j} \quad \text{avec } a \text{ petit}$$

et donc

$$P_j \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Ce qui signifie que le point fixe est attracteur. Le prix convergera donc à terme vers $\frac{1}{2}$ dans cette situation.

Les graphes de la figure 3.7 nous montrent que les résultats obtenus analytiquement et numériquement sont très proches. De fait, si le biais de confirmation est élevé, la différence entre l'inefficience du marché calculée analytiquement et numériquement est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-7} lors des 200 premiers jours (graphe de gauche). La même différence est de l'ordre de 10^{-4} lorsque σ est de l'ordre de

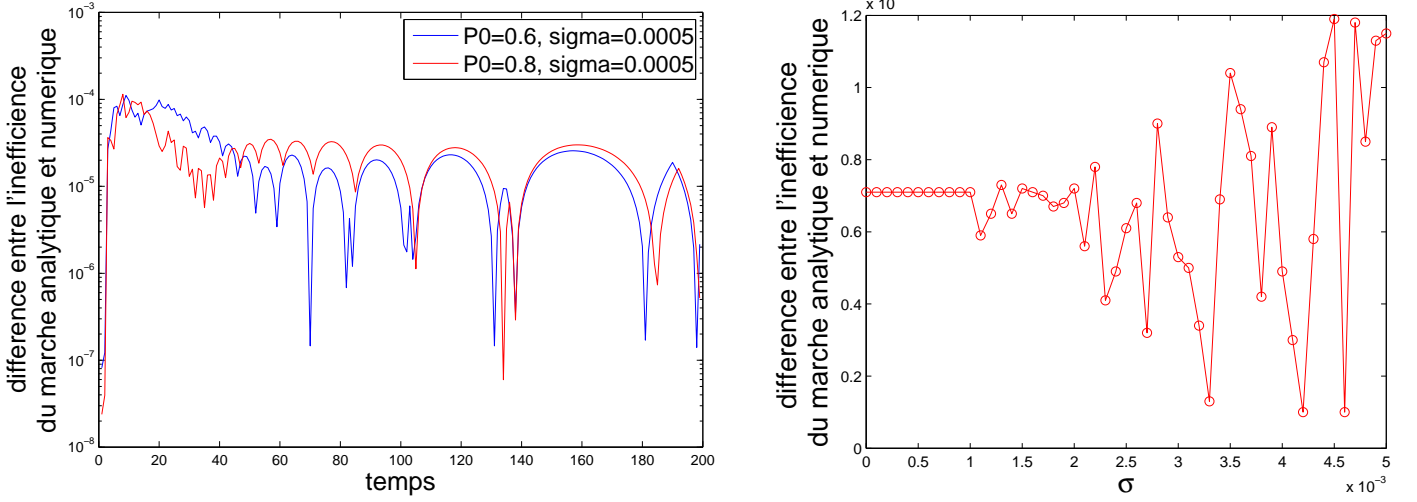


FIGURE 3.7 – Interaction sociale pure ($\alpha = 0$) avec large biais de confirmation ($\sigma \sim 0$). Gauche : différence entre l'efficiency de marché calculée analytiquement et numériquement en fonction du temps avec $P_0 = 0.8$ ou 0.6 et $\sigma = 5 \times 10^{-4}$. Droite : différence entre l'efficiency de marché calculée analytiquement et numériquement en fonction de σ . Valeurs des paramètres : $N = 1000$, $c = 0.005$, 20 itérations.

10^{-3} (en considérant que, dans le cas numérique, le prix est calculé jusqu'à ce qu'il se stabilise).

3.2.2 Faible confirmation des tendances : $\sigma \sim 1$

Dans ce cas, le biais de confirmation est faible, donc le seuil de rejet de l'information extérieure est grand. Cela implique que lorsque l'agent i rencontre l'agent k pour échanger les connaissances qu'ils ont à propos du prix des actifs, l'agent i va ajouter à ce qu'il savait tout ce qu'il aura appris de k .

Considérons d'abord que tous les agents révisent leurs anticipations. Nous nous trouvons alors dans le cas où $\gamma = 1$. Le paramètre α n'a pas changé et est donc toujours nul puisque nous traitons le cas où l'agent construit son anticipation uniquement avec l'information qu'il récolte par interaction sociale. Dans ce cas,

regardons comment les agents forment leurs anticipations.

$$\begin{aligned}
P_{j+1}^{a,i} &= \alpha P_j + (1 - \alpha) \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| > \sigma \\ \frac{P_j^{a,i} + P_j^{a,k}}{2} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= 0P_j + (1 - 0) \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| > \sigma \\ \frac{P_j^{a,i} + P_j^{a,k}}{2} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \sigma \sim 1 \\
&= \frac{P_j^{a,i} + P_j^{a,k}}{2}
\end{aligned}$$

Chaque jour, tous les agents construisent leur anticipation pour le lendemain en considérant, d'une part, leur anticipation actuelle et d'autre part l'anticipation actuelle des agents avec lesquels ils ont échangé de l'information.

Puisque nous avons émis l'hypothèse que les anticipations du prix initial étaient distribuées uniformément sur $[0, 1]$, leur moyenne vaut donc $\frac{1}{2}$. Cela nous permet de déduire

$$\tilde{P}_{j+1}^a = \tilde{P}_j^a = \frac{1}{2}$$

où \tilde{P}^a est la moyenne de toutes les anticipations. Puisque $\frac{1}{2}$ est la moyenne de toutes les anticipations, à ce prix, nous aurons un nombre égal d'acheteurs et de vendeurs, c'est-à-dire,

$$P_j^* = \frac{1}{2}.$$

Nous allons expliquer brièvement la dynamique de DEFFUANT et ensuite montrer que la dispersion des anticipations de prix des actifs, notée Δ_{P_a} , suit cette dynamique.

La dynamique de DEFFUANT est un modèle basé sur la stratégie du compromis. On considère une population composée de N agents. Ces agents interagissent entre eux en se rencontrant deux par deux. Au temps t , l'agent i a une certaine opinion $x_i(t)$ et l'agent j , $x_j(t)$. Comme dans notre modèle, l'agent s'appropriera l'information de l'autre si celle-ci est suffisamment proche de la sienne. Nous avons que si $|x_i(t) - x_j(t)| < \epsilon$ alors

$$\begin{aligned}
x_i(t+1) &= x_i(t) + \mu[x_j(t) - x_i(t)] \\
x_j(t+1) &= x_j(t) + \mu[x_i(t) - x_j(t)],
\end{aligned}$$

où $\mu \in [0, \frac{1}{2}]$. Sinon, rien ne se passe.

Nous observons qu'après l'interaction, la position des agents qui ont communiqué ensemble est plus proche d'un facteur μ . Cependant, la moyenne de l'ensemble des opinions des agents (quelque soit ϵ et μ) est invariante et vaut $\frac{1}{2}$.

A cause du facteur ϵ , dans l'ensemble des agents se forment des groupes à l'intérieur desquels les agents peuvent interagir, mais les agents de différents groupes ont des opinions trop éloignées pour pouvoir les mettre en commun. Les simulations de MONTE CARLO [9] montrent que le nombre de groupes n_c d'agents qui se forment peut être approché par

$$n_c = \frac{1}{2\epsilon},$$

et donc plus ϵ est petit, plus il y aura de groupes.

Grâce à ce modèle, nous pouvons évaluer la dispersion des anticipations du prix des actifs. Dans notre cas, $\mu = \frac{1}{2}$ et ϵ correspond au paramètre σ . Le temps est discret, et chaque nouvelle journée, l'opinion des personnes appartenant à un même groupe se rapproche. Cela implique que la distance entre deux groupes augmente. La dispersion des anticipations $\Delta_{P_a}(t)$ suit alors le modèle tel que

$$\Delta_{P_a}(j) \sim \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}$$

Selon cette loi, à long terme, la dispersion des anticipations tend vers 0. Cela est confirmé à la figure 3.8.

En effet, par exemple pour $\gamma = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 \Delta_{P_a}(t)}{t} &= \frac{\log_2 \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}}{t} \\ &= \frac{\frac{-j}{2}}{j} \\ &\simeq -0.5, \end{aligned}$$

ce que nous observons bien à la figure 3.8. Nous savons que les agents participent au marché si

$$|P_{j+1}^a - P_j| - c \geq 0,$$

c'est-à-dire qu'ils se retireront de toute activité du marché si

$$\begin{aligned} |P_{j+1}^a - P_j| - c < 0 &\Leftrightarrow |P_{j+1}^a - P_j| < c \\ &\Leftrightarrow -c < P_{j+1}^a - P_j < c. \end{aligned} \tag{3.5}$$

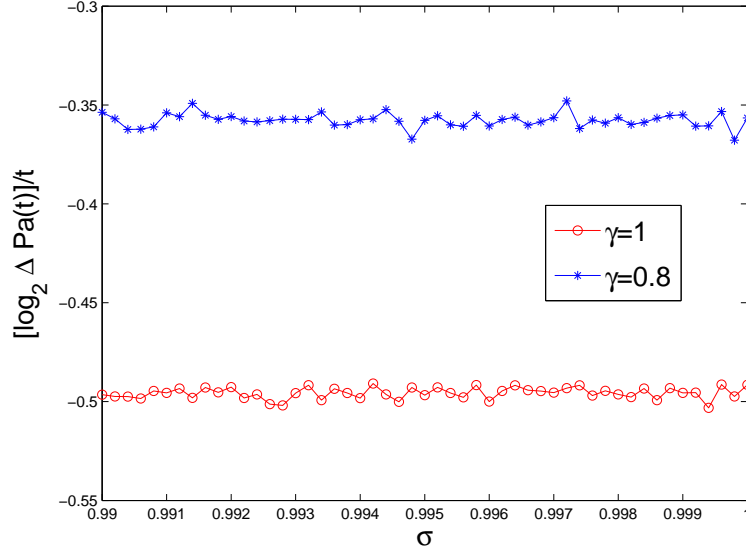


FIGURE 3.8 – Interaction sociale pure ($\alpha = 0$) avec faible biais de confirmation ($\sigma \sim 1$). Evolution de $(\log_2 \Delta P_a(t))/t$ en fonction de σ . Valeurs des paramètres : $N = 1000$, $c = 0.005$, 20 itérations.

Puisque toutes les anticipations des agents sont construites par considération de l'information extérieure, elles se centralisent. Les activités du marché s'arrêteront lorsque les anticipations de tous les agents seront dans un intervalle plus petit que $2c$. Nous savons donc que le marché s'arrête lorsque

$$\frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} < 2c.$$

Cela se produira après un temps \tilde{J} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} < 2c &\Leftrightarrow \log_2 1 < 1 + \log_2 c + \frac{j}{2} \\ &\Leftrightarrow \tilde{J} \sim -2(1 + \log_2 c). \end{aligned}$$

Nous émettons dès lors l'hypothèse que les anticipations sont suffisamment dispersées dans l'intervalle $[0, 1]$ pour que le marché ne se termine pas rapidement.

Nous pouvons à présent calculer le déséquilibre du marché $\beta(P_j)$ et le prix pour la journée suivante. Il est identique au déséquilibre lorsque la confirmation des tendances était forte mais, dans ce cas-ci, on le divise par la dispersion des

anticipations puisque les agents ne rejettent pas systématiquement l'opinion des autres :

$$\beta(P_j) = 2^{\frac{j}{2}}|1 - 2P_j|$$

et

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= \beta(P_j)P_{j+1}^* + (1 - \beta(P_j))P_j \\ &= (2^{\frac{j}{2}}|1 - 2P_j|)\frac{1}{2} + (1 - (2^{\frac{j}{2}}|1 - 2P_j|))P_j \\ &= 2^{\frac{j}{2}-1}|1 - 2P_j| + P_j - 2^{\frac{j}{2}}|1 - 2P_j|P_j \\ &= P_j + 2^{\frac{j}{2}-1}|1 - 2P_j|(1 - 2P_j). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Comme dans la situation précédente, nous allons exprimer l'évolution du prix de manière dynamique. Pour cela, définissons une variable x_j telle que

$$x_j = 2^{\frac{j}{2}} \left(P_j - \frac{1}{2} \right)$$

ou encore

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{x_j}{2^{\frac{j}{2}}}.$$

Nous cherchons une fonction g telle que

$$x_{j+1} = g(x_j).$$

Nous avons

$$P_{j+1} = P_j + 2^{\frac{j}{2}-1}|1 - 2P_j|(1 - 2P_j).$$

Considérons d'abord le cas où $1 - 2P_j > 0$, i.e. $x < 0$:

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= P_j + 2^{\frac{j}{2}-1}(1 - 2P_j)^2 \\ &= P_j + 4 \cdot 2^{\frac{j}{2}-1} \left(\frac{1}{2} - P_j \right)^2 \\ &= P_j + 2 \cdot 2^{\frac{j}{2}} \left(\frac{x_j}{2^{\frac{j}{2}}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x_j}{2^{\frac{j}{2}}} + 2 \frac{x_j^2}{2^{\frac{j}{2}}} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} P_{j+1} - \frac{1}{2} &= \frac{x_j}{2^{\frac{j}{2}}} + 2 \frac{x_j^2}{2^{\frac{j}{2}}} \Leftrightarrow \frac{x_{j+1}}{2^{\frac{j+1}{2}}} = \frac{x_j}{2^{\frac{j}{2}}} + 2 \frac{x_j^2}{2^{\frac{j}{2}}} \\ &\Leftrightarrow x_{j+1} = \sqrt{2}(x_j + 2x_j^2) \\ &\Leftrightarrow x_{j+1} = \sqrt{2}x_j + 2\sqrt{2}x_j^2 \end{aligned}$$

Si dans le cas contraire, nous avons $1 - 2P_j \leq 0$, ou $x \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
 P_{j+1} &= P_j + 2^{\frac{j}{2}-1}(2P_j - 1)(1 - 2P_j) \\
 &= P_j + 2^{\frac{j}{2}-1}(-4P_j^2 + 4P_j - 1) \\
 &= P_j - 2^{\frac{j}{2}-1}(2P_j - 1)^2 \\
 &= P_j - 2 \cdot 2^{\frac{j}{2}}(P_j - \frac{1}{2})^2
 \end{aligned}$$

et, par analogie avec le cas précédent, nous pouvons déduire avec $x \geq 0$,

$$x_{j+1} = \sqrt{2}x_j - 2\sqrt{2}x_j^2.$$

Nous avons donc le *mapping*

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Nous pouvons calculer les points fixes de ce *mapping*

$$\begin{aligned}
 g(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{2}x \mp 2\sqrt{2}x^2 = x \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2}x \mp 2\sqrt{2}x^2 - x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x(\sqrt{2} \mp 2\sqrt{2}x - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \pm \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

et leur stabilité

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= (\sqrt{2}x \mp 2\sqrt{2}x^2)' \\
 &= \begin{cases} \sqrt{2} - 4\sqrt{2}x & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{2} + 4\sqrt{2}x & \text{si } x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

* Si $x = 0$; $x \geq 0$,

$$g'(0) = \sqrt{2} \simeq 1.41 \Rightarrow |g'(0)| > 1.$$

* Si $x = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$; $x \geq 0$, et

$$\begin{aligned} g'(\frac{2-\sqrt{2}}{4}) &= \sqrt{2} - 4\sqrt{2}(\frac{2-\sqrt{2}}{4}) \\ &= \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2 \\ &\simeq 0.59 \\ &\Rightarrow |g'(\frac{2-\sqrt{2}}{4})| < 1 \end{aligned}$$

* Si $x = -\frac{2-\sqrt{2}}{4}$; $x < 0$, et

$$\begin{aligned} g'(-\frac{2-\sqrt{2}}{4}) &= \sqrt{2} + 4\sqrt{2}(-\frac{2-\sqrt{2}}{4}) \\ &= \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2 \\ &\simeq 0.59 \\ &\Rightarrow |g'(-\frac{2-\sqrt{2}}{4})| < 1 \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que le point fixe $x = 0$ est instable alors que les deux autres sont stables.

Lorsque les jours avancent et qu'il y a de l'activité sur le marché, les prix des actifs convergent, en effet :

$$P_j = \frac{x_j}{2^{\frac{j}{2}}} + \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Nous avons donc montré que le marché d'informations dans ce cas est efficace à long terme et qu'il donne un résultat satisfaisant après un nombre fini de périodes.

La figure 3.9 confirme ces résultats. En effet, le graphe de gauche nous montre que lorsque $\alpha = 0$, $\sigma \simeq 0$ et $\gamma = 1$, l'inefficience de marché calculée analytiquement par l'équation 3.6 est très proche (précision 10^{-4}) de l'inefficience du marché calculée numériquement. En ce qui concerne le temps de convergence, d'un point de vue analytique, nous avons montré que le marché s'arrête lorsque les dispersions des anticipations se situent dans un intervalle inférieur à $2c$, c'est à dire, lorsque $\Delta_{P_a}(j) \leq 2c$. Le graphe de droite nous montre que cette affirmation est très proche du résultat obtenu avec les tests numériques. En effet, le rapport entre ces deux temps vaut approximativement 1.2 .

Nous avons émis l'hypothèse que tous les agents révisaient leurs anticipations, voyons à présent ce qui se passe si seulement une fraction γN d'entre eux les modifie.

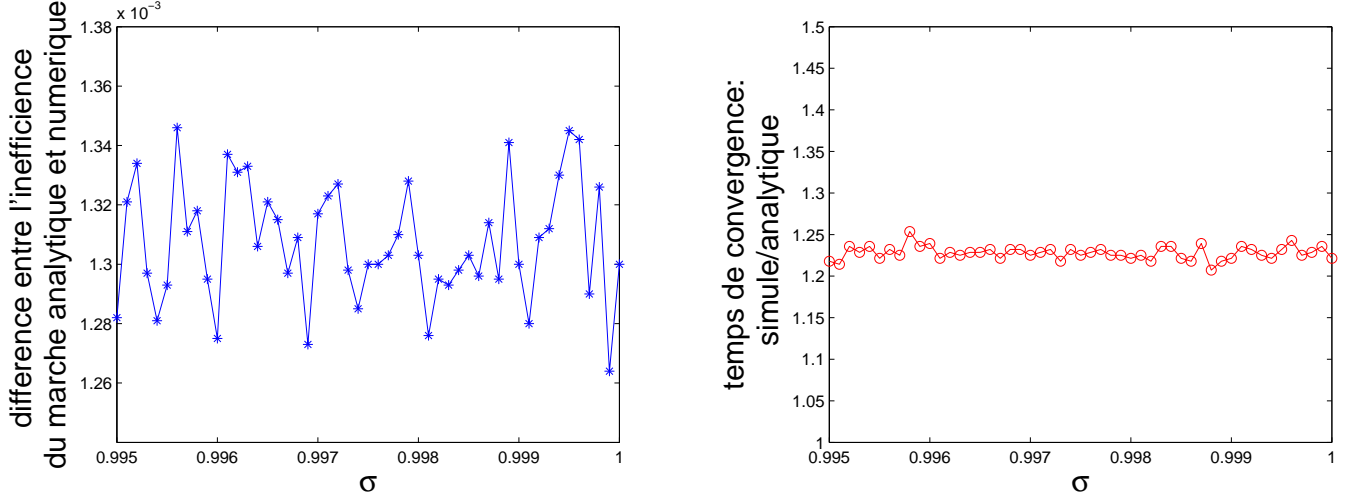


FIGURE 3.9 – Interaction sociale pure ($\alpha = 0$) avec faible biais de confirmation ($\sigma \sim 1$). Gauche : différence entre l'inefficience de marché calculée analytiquement et numériquement en fonction de σ . Droite : rapport entre le temps de convergence du prix du marché calculé numériquement et analytiquement en fonction de σ . Valeurs des paramètres : $N = 1000$, $c = 0.005$, 20 itérations.

Nous obtenons que

$$P_{j+1}^{a,i} = \begin{cases} \frac{P_j^{a,i} + P_j^{a,k}}{2} & \text{si l'agent } i \in \gamma N \\ P_j^{a,i} & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons effectuer le même raisonnement que dans le cas où $\gamma = 1$ et considérer que puisque les anticipations du prix initial sont distribuées uniformément dans $[0, 1]$, leur moyenne vaut donc $\frac{1}{2}$ et

$$\tilde{P}_{j+1}^a = \tilde{P}_j^a = \frac{1}{2}.$$

A ce prix, nous avons un nombre égal d'acheteurs et de vendeurs :

$$P_j^* = \frac{1}{2} \quad \forall t.$$

Par contre, puisque tous les agents ne révisent pas leurs anticipations, l'intervalle sur lequel sont distribuées les anticipations sur $[0, 1]$ est plus large que précédemment. La déviation (Δ_{P_a}) représentant cet intervalle tend toujours vers 0, mais moins rapidement que lorsque tous les agents révisaient leurs anticipations. Elles suivent la loi

$$\Delta_{P_a}(t) \sim \frac{1}{2^{a_\gamma t}} \quad (3.7)$$

où q_γ est une droite de variable γ , notons la $q_\gamma = a\gamma + b$. Pour déterminer les valeurs des paramètres a et b , évaluons le logarithme de l'expression 3.7. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \log(\Delta_{P_a}(t)) \sim \log\left(\frac{1}{2^{q_\gamma t}}\right) &\Leftrightarrow \log(\Delta_{P_a}(t)) \sim -q_\gamma t \\ &\Leftrightarrow \frac{\log(\Delta_{P_a}(t))}{t} \sim -q_\gamma \end{aligned}$$

La figure 3.10 représente l'expression

$$\frac{\log(\Delta_{P_a}(t))}{t}$$

en fonction de γ . Elle nous permet donc de trouver l'inverse des valeurs des paramètres de la droite q_γ . En évaluant deux points sur la droite, nous trouvons $a = 0.61 \pm 0.02$ et $b = -0.13 \pm 0.01$. Les paramètres a et b sont indépendants de σ puisque la droite est identique quelle que soit la valeur de cette variable.

L'équation 3.7 a été obtenue en effectuant le chemin inverse de ce que nous avons fait. Nous sommes partis de la droite qui représentait le logarithme afin d'obtenir la formule souhaitée.

Calculons grâce à ces données le déséquilibre du marché $\beta(P_j)$ et le prix du lendemain selon le modèle que nous avons établi :

$$\beta(P_j) = 2^{q_\gamma j} |1 - 2P_j|$$

et

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= \beta(P_j)P_{j+1}^* + (1 - \beta(P_j))P_j \\ &= (2^{q_\gamma j} |1 - 2P_j|) \frac{1}{2} + (1 - (2^{q_\gamma j} |1 - 2P_j|))P_j \\ &= 2^{q_\gamma j-1} |1 - 2P_j| + P_j - 2^{q_\gamma j} |1 - 2P_j| P_j \\ &= P_j + 2^{q_\gamma j-1} |1 - 2P_j| (1 - 2P_j). \end{aligned}$$

Pour parvenir à exprimer ce résultat de façon dynamique, nous introduisons une nouvelle variable y_j telle que

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{y_j}{2^{q_\gamma j}}$$

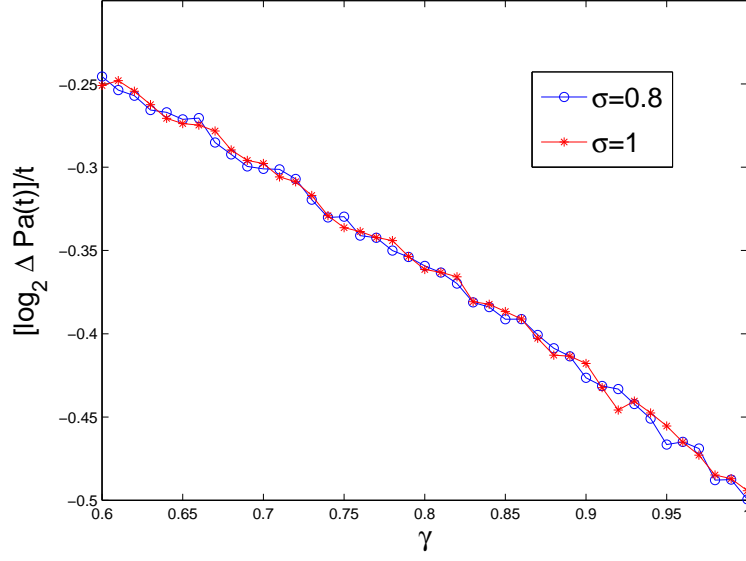


FIGURE 3.10 – Interaction sociale pure ($\alpha = 0$) avec faible biais de confirmation ($\sigma \sim 1$). Evolution de $(\log_2 \Delta_{P_a}(t))/t$ en fonction de γ . Valeurs des paramètres : $N = 1000$, $c = 0.005$, 20 itérations.

Exprimons l'évolution du prix en fonction de cette nouvelle variable

$$\begin{aligned}
 P_{j+1} &= P_j + 2^{q_\gamma j-1} |1 - 2P_j| (1 - 2P_j) \\
 \frac{1}{2} + \frac{y_{j+1}}{2^{q_\gamma(j+1)}} &= \frac{1}{2} + \frac{y_j}{2^{q_\gamma j}} + 2^{q_\gamma j-1} |1 - 2(\frac{1}{2} + \frac{y_j}{2^{q_\gamma j}})| (1 - 2(\frac{1}{2} + \frac{y_j}{2^{q_\gamma j}})) \\
 \frac{y_{j+1}}{2^{q_\gamma(j+1)}} &= \frac{y_j}{2^{q_\gamma j}} + 2^{q_\gamma j-1} |1 - 1 - 2\frac{y_j}{2^{q_\gamma j}}| (1 - 1 - 2\frac{y_j}{2^{q_\gamma j}}) \\
 y_{j+1} &= 2^{q_\gamma(j+1)} \frac{y_j}{2^{q_\gamma j}} + 2^{q_\gamma(j+1)} 2^{q_\gamma j-1} | - \frac{y_j}{2^{q_\gamma j-1}} | (- \frac{y_j}{2^{q_\gamma j-1}}) \\
 &= 2^{q_\gamma} y_j - 2^{q_\gamma(j+1)} | - \frac{y_j}{2^{q_\gamma j-1}} | (y_j) \\
 &= 2^{q_\gamma} y_j - 2^{q_\gamma+1} | - y_j | y_j \\
 &= 2^{q_\gamma} y_j - 2^{q_\gamma+1} |y_j| y_j
 \end{aligned}$$

Calculons les points fixes de ce *mapping* :

$$\begin{aligned}
 y_{j+1} = y_j &\Leftrightarrow 2^{q_\gamma} y_j - 2^{q_\gamma+1} |y_j| y_j = y_j \\
 &\Leftrightarrow y_j (2^{q_\gamma} - 2^{q_\gamma+1} |y_j| - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y_j = 0 \\ \text{ou} \\ y_j = \mp \frac{1-2^{q_\gamma}}{2^{q_\gamma+1}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Etudions à présent leur stabilité :

$$\begin{aligned}
 y'_{j+1} &= (2^{q_\gamma} y_j - 2^{q_\gamma+1} |y_j| y_j)' \\
 &= \begin{cases} 2^{q_\gamma} - 2^{q_\gamma} \cdot 4 y_j & \text{si } y_j \geq 0 \\ 2^{q_\gamma} + 2^{q_\gamma} \cdot 4 y_j & \text{si } y_j < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Voyons vers quelles valeurs extrêmes peut varier la droite $q_\gamma = a\gamma + b$ sachant que $\gamma \in [0, 1]$. Lorsque $\gamma = 0$, $q_\gamma = b$, i.e. -0.13 ± 0.01 . Par contre, si $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned}
 q_\gamma &= a + b \\
 &= 0.61 \pm 0.02 - 0.13 \pm 0.01 \\
 &< 0.51
 \end{aligned}$$

Les valeurs de q_γ sont donc comprises dans l'intervalle $[-0.14, 0.51]$.

* Pour $y_j = 0$, nous avons

$$y'_{(j+1)} = 2^{q_\gamma} \Rightarrow |y'_{(j+1)}| > 1.$$

* Si $y_j = \frac{1-2^{q_\gamma}}{2^{q_\gamma+1}} < 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
 y'_{(j+1)} &= 2^{q_\gamma} + 2^{q_\gamma+1} \cdot 2 \left(\frac{1-2^{q_\gamma}}{2^{q_\gamma+1}} \right) \\
 &= 2^{q_\gamma} + 2 - 2 \cdot 2^{q_\gamma} \\
 &= -2^{q_\gamma} + 2 \\
 &\Rightarrow |y'_{(j+1)}| < 1
 \end{aligned}$$

* Et si $y_j = -\frac{1-2^{q_\gamma}}{2^{q_\gamma+1}} \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 y'_{(j+1)} &= 2^{q_\gamma} - 2^{q_\gamma+1} \cdot 2 \left(-\frac{1-2^{q_\gamma}}{2^{q_\gamma+1}} \right) \\
 &= 2^{q_\gamma} + 2 - 2 \cdot 2^{q_\gamma} \\
 &\Rightarrow |y'_{(j+1)}| < 1
 \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que le point fixe $y_j = 0$ est instable, alors que les deux autres sont stables. A long terme, le prix de l'actif sur le marché converge vers la valeur fondamentale ($1/2$) lorsque seule une fraction d'agents révisent leur anticipation. Etudions analytiquement le temps nécessaire à la convergence du prix.

Tant qu'il y a des échanges, c'est à dire de l'activité sur le marché, le prix des actifs a tendance à diminuer pour converger vers 0.5. Nous avons montré avec l'équation 3.5 que le marché s'arrête lorsque les anticipations se situent toutes dans un intervalle inférieur à $2c$. C'est à dire, lorsque

$$\Delta_{P_a}(j) \sim \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} < 2c.$$

Résolvons cette inéquation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} < 2c &\Leftrightarrow \log_2(1) < \log_2(2c2^{\frac{j}{2}}) \\ &\Leftrightarrow -1 < \log_2 c + q_\gamma j \\ &\Leftrightarrow \frac{-(1 + \log_2 c)}{q_\gamma} \sim j \end{aligned}$$

Il faudra donc autour de

$$-\frac{(1 + \log_2 c)}{q_\gamma} \text{ jours}$$

pour que le prix de l'actif converge et que le marché se termine.

3.3 Anticipation basée sur une combinaison des tendances

Lorsque les agents forment leur anticipation pour le prix du lendemain en considérant, d'une part, le prix du passé et, d'autre part l'information provenant de l'interaction avec d'autres agents, il nous est impossible de modéliser le prix d'échange sur le marché de manière analytique. Pour y remédier, nous allons effectuer des simulations numériques grâce à la modélisation décrite préalablement.

La figure 3.11 représente l'inefficience du marché observée pour différents γ , en considérant tous les biais de confirmation possibles ($\sigma \in [0, 1]$).

Pour effectuer notre analyse, nous avons ajouté l'hypothèse que les agents ont une faible liquidité. Cela nous permettra d'observer le nombre d'agents qui se font

exclure du marché ainsi que l'impact que cela a sur le prix du marché et sur sa convergence. Le prix de l'actif évolue jusqu'à ce qu'il converge vers l'état stable. Dans ce cas-ci, cet état est défini par le fait que le prix au jour $j + 1$ diffère du prix au jour j d'une valeur inférieure à 10^{-6} .

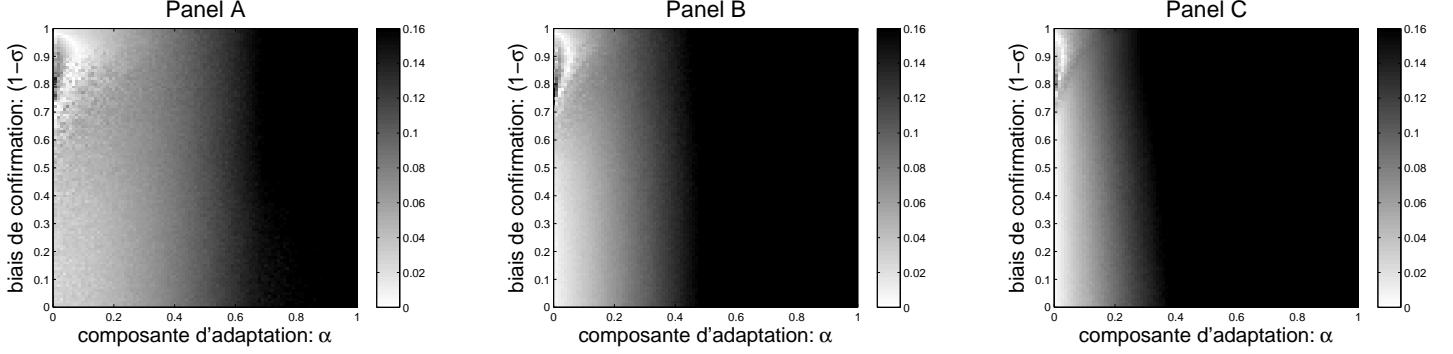


FIGURE 3.11 – Inefficiency du marché selon la composante d'adaptation (α) et le biais de confirmation ($(1 - \sigma)$). Variation de γ selon les panels : de gauche à droite, $\gamma = 0.2, 0.5$ et 1 . Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.9$ et $L_0 = 10$, 10 simulations.

Ces graphes représentent l'inefficience du marché lorsque α et $(1 - \sigma)$ varient de 0 à 1.

Nous observons que l'inefficience du marché varie en fonction des trois paramètres que nous étudions. Nous constatons que plus γ est grand, plus le marché est non efficient pour un α correspondant. Par exemple, pour $\alpha = 0.4$, lorsque $\gamma = 0.2$, le marché est semi efficient, alors que lorsque $\gamma = 1$, il ne l'est plus du tout. L'inefficience du marché dépend également de la composante d'adaptation et du biais de confirmation puisque si nous traçons une droite horizontale et/ou verticale, l'inefficience du marché ne sera pas égale sur tous les points de cette droite.

Pour effectuer notre analyse, étudions plus en détails les résultats obtenus par rapport à la composante d'adaptation. Lorsque le biais de confirmation est faible, l'inefficience du marché croît de façon régulière en fonction de la composante d'adaptation. Tandis que, pour certains biais de confirmation élevés, en considérant α qui va de 0 à 1, l'inefficience du marché diminue d'abord et augmente par la suite.

Nous remarquons également que pour un α élevé, l'inefficience du marché est élevée, quels que soit le biais de confirmation et la proportion d'agents révisant

leur anticipation (ce phénomène est cependant accentué lorsqu'une proportion importante d'agents révisent leur anticipation). Cela correspond à la situation dans laquelle les agents donnent un poids important au prix du passé pour former leurs anticipations. Or, pour ces graphes, nous avons fixé le prix initial à $P_0 = 0.8$. Ce prix est largement supérieur à la valeur fondamentale de l'actif. Cela signifie que dès le deuxième jour, les agents qui révisent leur anticipation vont tous avoir une anticipation élevée (proche du prix initial). De plus, quel que soit le biais de confirmation, lorsque un agent reçoit d'un de ses pairs l'information que le prix de l'actif est faible, il aura tendance à lui donner peu de poids. Ce qui compte est donc le prix du passé, et puisqu'il est élevé, les anticipations deviendront toutes élevées. Dès lors, même lorsqu'il aura convergé, le prix restera fortement au dessus de la valeur fondamentale.

Nous pouvons conclure que, dans le cas où α est élevé, le degré de l'inefficacité d'information est important tout comme l'inefficacité du marché.

Lorsque la composante d'adaptation et le biais de confirmation sont faibles, le marché est relativement efficient. Cela provient de l'efficacité de l'interaction sociale, les agents donnent plus de poids à l'information provenant des autres (qu'ils rejettent rarement puisque σ est grand) qu'au prix du passé. Puisque au départ du marché, les anticipations sont uniformément distribuées dans $[0, 1]$. A long terme, le prix convergera vers une valeur proche de 0.5. Plus la composante d'adaptation est faible, plus les agents donnent du poids à l'information provenant de leurs pairs. Donc, moins de "bruit" provenant du prix du passé influence le prix actuel. A long terme, le marché est alors plus efficace lorsque α est faible (dans le cas où le biais de confirmation est également faible).

Puisque nous constatons un caractère particulier à l'inefficience du marché lorsque la composante d'adaptation est faible et le biais de confirmation élevé, nous nous attarderons plus sur ces valeurs des paramètres c'est-à-dire, lorsque α varie de 0 à 0.25 et $(1 - \sigma)$ de 0.6 à 1. Ces graphes ne sont autre qu'un zoom du coin supérieur gauche de chacun des graphes de la figure 3.11.

Nous avons déjà traité les cas où α est grand quel que soit σ et où α et σ sont faibles. Il nous reste à analyser le cas (représenté à la figure 3.12) où le biais de confirmation est important et la composante d'adaptation est faible.

Nous allons d'abord considérer le cas où α est faible mais pas extrêmement proche de 0. C'est le cas où l'efficience du marché observée est la meilleure. D'un point de vue économique, cette situation correspond à celle dans laquelle les agents

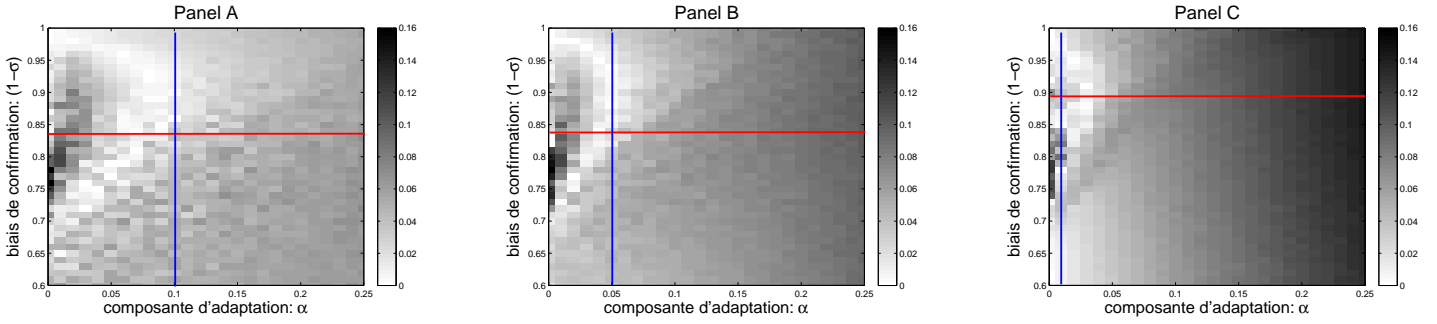


FIGURE 3.12 – Inefficiency du marché selon la composante d'adaptation (α) et le biais de confirmation ($(1 - \sigma)$). Variation de γ selon les panels : de gauche à droite, $\gamma = 0.2, 0.5$ et 1 . Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.9$ et $L_0 = 10$, 10 simulations.

donnent peu de poids au prix du passé, mais beaucoup à leur anticipation précédente (puisque'ils ont tendance à rejeter l'information extérieure). Qu'elle soit proche ou éloignée du prix, les agents conservent donc à peu près leur anticipation au fil des jours. Par contre, le prix du marché, lui, diminue. Cela s'explique par le rôle du commissaire priseur (puisque nous sommes dans un marché de fixing) qui tente d'établir l'égalité entre le nombre d'acheteurs et de vendeurs. Les agents ayant à la base une anticipation faible vont la revoir légèrement à la hausse parce que, bien que son poids soit faible, le prix initial est élevé. Alors que, suite à la chute du prix de l'actif, les anticipations élevées vont être légèrement diminuées. Ces deux phénomènes mis ensemble impliquent que la moyenne des anticipations reste très proche de 0.5, et donc, le prix auquel le nombre d'acheteurs est égal au nombre de vendeurs est lui aussi ± 0.5 . Le cas que nous venons de traiter est celui où le marché est le plus efficace, c'est-à-dire où l'inefficacité du marché est la plus proche de 0 (représenté en clair sur le graphe).

Analysons à présent le cas où la composante d'adaptation est encore plus faible que précédemment. En effet, lorsque α est faible (ex : 0.07 lorsque $\gamma = 0.2$), le marché est extrêmement efficace. Par contre, il perd de son efficacité lorsque α diminue. Expliquons les raisons de l'augmentation d'inefficacité de marché lorsque α est très proche de 0. Les agents qui révisent leur anticipation la forment en se basant sur leur anticipation de la veille et le prix initialement élevé est revu quotidiennement à la baisse par le commissaire priseur. Seulement, puisque ici α vaut presque 0, les agents dont l'anticipation initiale est faible ne vont que très peu la revoir à la hausse puisqu'il ne sont presque pas influencés par le prix du passé. Ce phénomène sera donc plus lent que la chute du prix. Les agents avec une faible anticipation initiale se retrouveront toujours dans la situation d'acheteurs.

Ils vont au fil des jours perdre de la liquidité et finalement être exclus du marché. Puisque les agents exclus sont remplacés par des agents avec la même anticipation initiale, cela ralentira d'autant plus le processus d'augmentation de la moyenne des anticipations. A long terme, cela implique que, lorsque le prix se sera stabilisé, il restera relativement fort éloigné de la valeur fondamentale de l'actif. Le marché dans ce cas n'est donc pas efficient.

Les graphes représentés à la figure 3.13 confirment les interprétations que nous avons faites de la figure 3.11. En effet, ils représentent le nombre moyen d'agents exclus du marché chaque jour lorsque le biais de confirmation est extrême et la composante d'adaptation est faible, cela pour les mêmes γ qu'aux figures 3.11 et 3.12. Ce sont les agents dont la liquidité n'est plus suffisamment grande pour qu'ils puissent encore participer au marché.

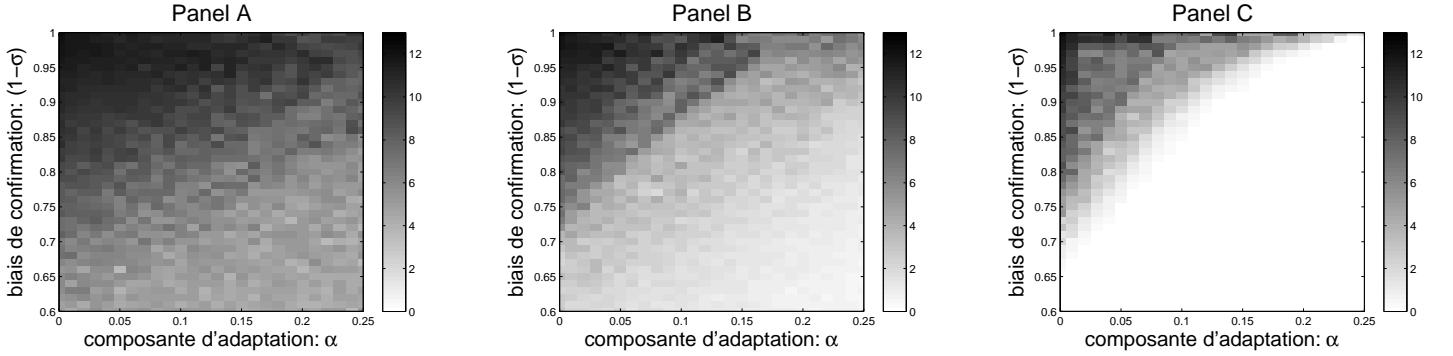


FIGURE 3.13 – Nombre moyen d'agent expulsé du marché par jour selon la composante d'adaptation (α) et le biais de confirmation ($(1 - \sigma)$). Variation de γ selon les panels : de gauche à droite, $\gamma = 0.2, 0.5$ et 1 . Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.9$ et $L_0 = 10$, 10 simulations.

Nous constatons que pour les α et σ représentés, plus γ est grand, moins est important le nombre moyen d'agents exclus du marché. Similairement avec les explications des graphes de la figure 3.12, lorsque le biais de confirmation est extrême (et α petit), puisque les agents ne considèrent que leurs propres informations, ils sont nombreux à être exclus du marché. Par contre, plus ils considèrent le prix du passé et/ou l'information provenant des autres, plus le nombre d'exclus du marché diminuera.

Nous observons, grâce aux trois panels représentés à la figure 3.12, que plus γ est petit, c'est-à-dire, plus la proportion d'agents révisant leur anticipation est faible, plus l'inefficience du marché a tendance à être non monotone en fonction

de α . Les lignes horizontales sur les graphes de la figure 3.12 correspondent aux différents biais de confirmation pour lesquels l'inefficience du marché est la plus non-monotone en fonction de α . Elles sont représentées à la figure 3.14 pour les γ correspondants.

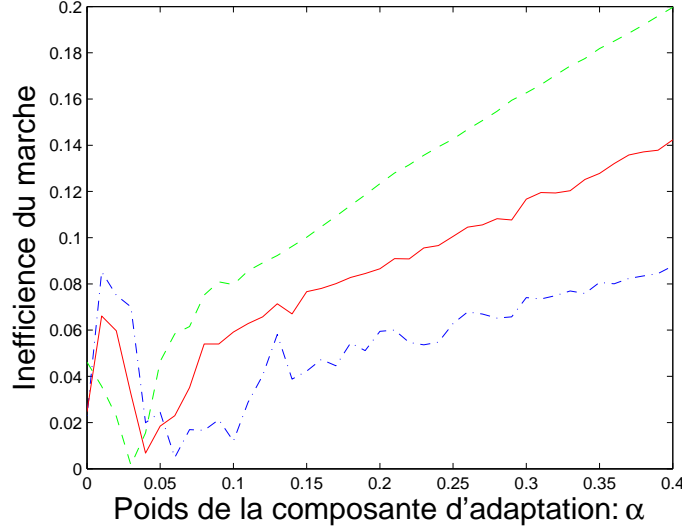


FIGURE 3.14 – Inefficience du marché en fonction de la composante d'adaptation (α). En vert : $\gamma = 0.2$, $(1 - \sigma) = 0.84$, en rouge : $\gamma = 0.5$, $(1 - \sigma) = 0.84$ et en bleu : $\gamma = 1$, $(1 - \sigma) = 0.9$. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.9$ et $L_0 = 10$, 10 simulations.

Lorsque les agents révisent relativement fréquemment leurs anticipations, les effets de l'interaction sociale (lorsque σ est grand) agissent plus rapidement pour un α fixé que si peu d'agents ne révisaient leurs anticipations. Ces deux paramètres agissent de façon complémentaire. Dans ce cas, les phénomènes observés lorsque le biais de confirmation est extrême et la composante d'adaptation faible ont tendance à disparaître. C'est pourquoi l'inefficience du marché est "plus" monotone lorsque beaucoup d'agents révisent leur anticipation.

Penchons nous à présent sur le paramètre σ , c'est-à-dire sur le biais de confirmation ($1 - \sigma$). Nous observons pour certaines valeurs de α fixées, par exemple représentées par les lignes verticales sur la figure 3.12, que l'inefficience du marché en fonction du biais de confirmation n'est pas monotone. En effet, si l'on descend le long de cette ligne verticale, l'inefficience du marché diminue d'abord et augmente ensuite, et cela quelle que soit la valeur du paramètre γ . Ces résultats sont représentés à la figure 3.15.

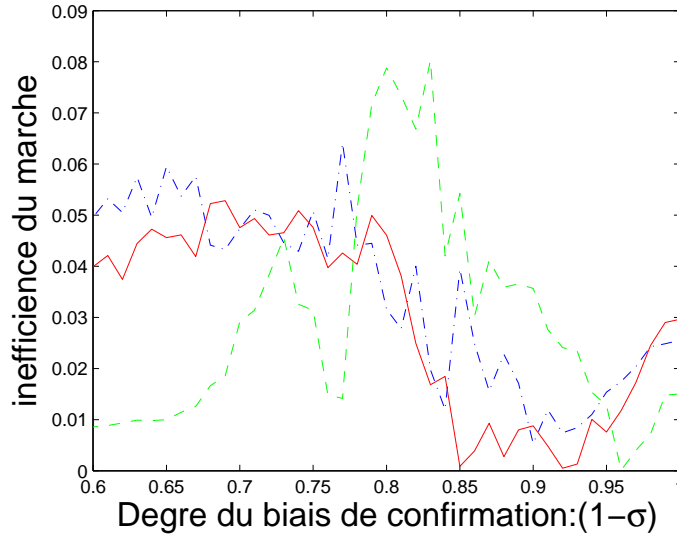


FIGURE 3.15 – Inefficiency du marché en fonction du biais de confirmation $(1 - \sigma)$. En bleu : $\gamma = 0.2$, $\alpha = 0.1$, en rouge : $\gamma = 0.5$, $\alpha = 0.05$ et en vert : $\gamma = 1$, $\alpha = 0.01$. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.9$ et $L_0 = 10$, 10 simulations.

Nous allons analyser ce résultat en considérant que le biais de confirmation est d'abord maximum et qu'il diminue, cela revient à lire le graphe de droite à gauche. Si, dans un premier temps, l'inefficience du marché diminue lorsque le biais de confirmation diminue pour un α fixé (α petit), c'est parce que les agents commencent à englober progressivement l'information extérieure et cela améliore l'efficacité du marché. En effet, de moins en moins d'agents sont exclus du marché et les anticipations, petites à la base, augmentent en même temps que le prix diminue.

Lorsque le biais de confirmation continue à chuter, nous avons observé que l'inefficience du marché augmente. Expliquons cette situation. Au départ, les anticipations sont uniformément distribuées dans $[0, 1]$, le prix de l'actif est élevé et la composante d'adaptation est petite, les agents accordent donc plus d'importance à l'interaction sociale. Les agents reverraient donc principalement leur anticipation à la hausse par le phénomène d'interaction sociale et le léger poids accordé au prix du passé et, le prix du marché, quant à lui, chute. Comme les agents se rencontrent de façon aléatoire, considérons deux cas. D'une part, si les agents englobent l'information provenant de leur pair, alors puisqu'ils avaient déjà tous revu leur anticipation à la hausse, celle-ci va rester importante. Dans ce cas, le prix à long terme restera élevé. D'autre part, s'ils rejettent l'information extérieure (avant que

les anticipations ne soient revues à la hausse), ils seront fortement influencés par la chute du prix. A long terme, le prix sera donc proche de la valeur fondamentale. Lorsque le biais de confirmation est moyen, les agents agissent plutôt comme dans le second cas. Mais, plus le biais de confirmation diminue, plus le premier cas prime et donc plus le prix stabilisé est supérieur à la valeur fondamentale.

Nous constatons, au fil de cette analyse, que les paramètres s'influencent mutuellement. Par exemples, certaines valeurs d'un paramètre atténuent les effets de l'autre.

Nous constatons que, sur les graphes de la figure 3.11 qui reprend toutes les valeurs possibles de la composante d'adaptation et du biais de confirmation, la zone où l'efficacité du marché est la meilleure correspond à des valeurs de α différentes selon la proportion d'agents révisant leur anticipation. En effet, plus γ est grand, plus la valeur du α correspondant à l'inefficience du marché la plus faible est petite. Pour se conforter dans cette idée, observons la figure suivante (3.16).

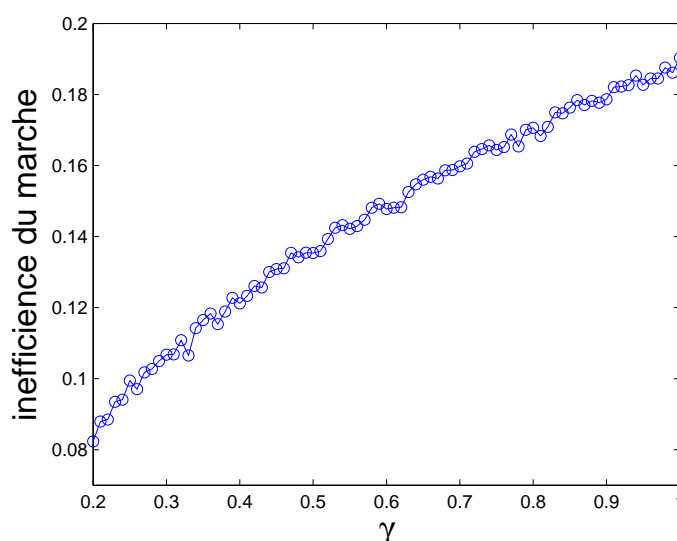


FIGURE 3.16 – Inefficience du marché en fonction de la proportion d'agents révisant leur anticipation (γ). Valeurs des paramètres : $\alpha = 0.4$, $\sigma = 0.4$, $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.9$ et $L_0 = 10$, 10 simulations.

Nous observons que, pour un α et un σ fixés relativement grands, l'inefficience du marché augmente lorsque γ augmente également. Cela provient du fait que les anticipations des agents sont rapidement trop élevées. Puisqu'ils révisent leur anticipation en adaptant le prix du passé (élevé) d'une part et en considérant

l'interaction sociale d'autre part, leurs anticipations seront rapidement revues à la hausse, ce qui aura un impact considérable sur le prix à long terme. Plus le nombre d'agents révisant leur anticipation est important, plus ce phénomène est accentué.

Toutes ces informations concernant l'évolution du prix lorsque les agents ont une composante d'adaptation comprise entre 0 et 1 nous permettent de tirer les conclusions suivantes :

- L'efficience du marché est fonction des paramètres α , σ et γ .
- Que ce soit en fonction de la composante d'adaptation ou du biais de confirmation, l'inefficience du marché peut être non-monotone.
- Cette tendance à être non-monotone selon α diminue plus la proportion d'agents révisant leur anticipation est grande.
- Les valeurs de la composante d'adaptation pour lesquelles l'efficience du marché est la meilleure diminuent lorsque la proportion d'agents révisant leur anticipation augmente.

De plus, nous préciserons que le marché est le plus efficient lorsque α est proche de 0 quel que soit γ .

REMARQUE :

L'ensemble des résultats énoncés et analysés jusqu'ici étaient présent dans l'article de référence :

"Follies subdued : Informational efficiency under adaptive expectations and confirmatory bias" de Gani ALDASHEV, Timoteo CARLETTI et Simone RIGHI.

Ils ont été reproduit numériquement et analytiquement.

Chapitre 4

Analyse selon une stratégie adaptative

Dans les chapitres précédents, dès le jour de l'ouverture du marché, les agents considéraient un certain α pour former leurs anticipations et ils le conservaient au fil des jours. A présent, nous allons émettre des hypothèses différentes.

Nous allons considérer que les agents sont intelligents, qu'ils s'adaptent aux conséquences du marché. Afin de réviser leurs anticipations de façon plus stratégique, ils vont chaque jour calculer la composante d'adaptation qui correspond le mieux à leurs attentes. Cela a pour but de maximiser les bénéfices pour les uns et de minimiser les pertes pour les autres. Comme auparavant, le premier jour, les agents ont tous la même composante d'adaptation : $\alpha_0^i, \forall i \in N$. Chaque jour, en fonction de leur perte ou de leur gain, ils vont évaluer quel aurait dû être α et considérer celui-ci pour former leur prochaine anticipation. Dès le deuxième jour et jusqu'à la fin du marché, les agents i auront donc des composantes d'adaptation différentes, notées pour le jour j : α_j^i .

Nous sommes toujours dans la situation où le marché est composé de N agents qui se rencontrent quotidiennement. Afin d'éviter les bruits dans notre analyse, nous décidons que ces agents ont un haut niveau de bien-être et une grande liquidité. Au départ, les anticipations des agents sont uniformément distribuées dans $[0, 1]$ et le prix initial est supérieur à la valeur fondamentale de l'actif (une analyse similaire pourrait être effectuée avec un prix initial inférieur à 0.5). Seule, une portion γN d'agents révisent leurs anticipations selon la formule suivante (2.4) :

$$P_{j+1}^{a,i} = \alpha P_j + (1 - \alpha) \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| \geq \sigma \\ (P_j^{a,i} + P_j^{a,k})/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Suite au calcul de cette nouvelle anticipation, en fonction du nombre d'a-

cheteurs et de vendeurs au prix actuel P_j (qui est alors connu de tous), le prix de l'actif pour le jour suivant est calculé (P_{j+1}). Ensuite, les agents, qu'ils aient vendu ou acheté, auront un autre niveau de bien-être et une nouvelle liquidité. Les agents qui ont révisé leur anticipation, vont calculer leur composante d'adaptation pour former leur prochaine anticipation de sorte que :

$$P_{j+1} = P_{j+1}^{a,i} \quad (4.1)$$

Nous avons fait le choix que les agents calculeront leur composante d'adaptation afin que leur anticipation soit égale au prix du marché.

Si l'on note

$$\Delta^i P = \begin{cases} P_j^{a,i} & \text{si } |P_j^{a,i} - P_j^{a,k}| \geq \sigma \\ (P_j^{a,i} + P_j^{a,k})/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous obtenons la composante d'adaptation que les agents vont utiliser à la période suivante :

$$\begin{aligned} P_{j+1} = \alpha_{j+1}^{a,i} P_j + (1 - \alpha_{j+1}^{a,i}) \Delta^i P &\Rightarrow P_{j+1} - \Delta^i P = \alpha_{j+1}^{a,i} (P_j - \Delta^i P) \\ &\Rightarrow \alpha_{j+1}^{a,i} = \frac{P_{j+1} - \Delta^i P}{P_j - \Delta^i P}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

En utilisant ce modèle pour le calcul de la composante d'adaptation, un problème se pose. Un agent peut un jour, ne considérer que le prix du passé pour former son anticipation et le lendemain, uniquement se baser sur l'interaction sociale. Intuitivement, ce schéma ne paraît pas très réaliste. C'est pourquoi, nous allons introduire un nouveau paramètre λ . Ce paramètre représente le poids en fonction duquel la composante d'adaptation sera modifiée .

Notons à présent la composante d'adaptation calculée précédemment grâce à la formule 4.1 , $\hat{\alpha}_{j+1}^{a,i}$:

$$\hat{\alpha}_{j+1}^{a,i} = \frac{P_{j+1} - \Delta^i P}{P_j - \Delta^i P}.$$

La composante d'adaptation que les agents vont considérer pour former leur anticipation en introduisant la variable de poids λ sera :

$$\alpha_{j+1}^{a,i} = \alpha_j^{a,i} + \lambda(\hat{\alpha}_{j+1}^{a,i} - \alpha_j^{a,i}). \quad (4.3)$$

La variable λ permet donc en quelque sorte de borner l'augmentation ou la diminution du nouveau α^i .

Lors de ce calcul, il est fréquent que la nouvelle composante d'adaptation dépasse les bornes fixées à α , c'est pourquoi nous ajoutons les contraintes suivantes :

$$\text{Si } \alpha^i > 1 \Rightarrow \alpha^i = 1$$

et .

$$\text{Si } \alpha^i < 0 \Rightarrow \alpha^i = 0$$

Afin de traiter tous les cas possibles, nous analyserons le cas où $\lambda = 1$ malgré les suppositions émises *supra*. Nous étudierons également l'efficacité du marché ainsi que l'évolution de la composante d'adaptation dans les cas où $\lambda \in]0, 1[$. L'introduction du paramètre λ permet de généraliser le modèle décrit dans les chapitres précédents, modèle qui correspond au cas $\lambda = 0$. En effet, chaque jour les α étaient égaux, nous avons donc,

$$\alpha_{j+1}^{a,i} = \alpha_j^{a,i} - 0(\alpha_j^{a,i} - \hat{\alpha}_{j+1}^{a,i}).$$

Nous posons une condition sans laquelle les agents ne peuvent pas adapter leur composante d'adaptation. Il faut qu'ils fassent partie des γN agents ayant révisé leur anticipation à la période précédente. Nous expliquons cette contrainte par le fait qu'il n'y a pas de raison que les agents puissent adapter leur α sans qu'ils montrent auparavant un certain intérêt à suivre la tendance du marché en modifiant leur anticipation.

Un autre phénomène intéressant à étudier est qu'il n'est pas positif pour tous les agents de réviser leur composante d'adaptation. Lorsqu'un agent est vendeur, il souhaite faire le maximum de profit, son anticipation peut rester fortement éloignée du prix puisque c'est cette différence qu'il envisage de gagner. Par contre, un acheteur a intérêt à ce que son anticipation soit la plus proche possible du prix de l'actif afin d'évaluer ce qu'il va devoir payer. C'est une façon pour lui de minimiser sa perte et de ne pas se retrouver dans une situation de déficit.

Pour ces raisons, nous considérerons principalement le cas où seuls les agents ayant révisé leur anticipation et acheté le jour j , adaptent leur composante d'adaptation pour former leur prochaine anticipation, cela pour différentes valeurs de la variable λ . Une section sera cependant prévue afin de montrer et de comparer les résultats que nous aurions obtenus si nous n'avions pas ajouté cette contrainte.

Nous allons, dans un premier temps, considérer que tous les agents révisent leurs anticipations chaque jour ($\gamma = 1$). Dans ce cas, tous les acheteurs adapteront leur composante d'adaptation. Ensuite, nous étudierons les différences de résultats si seulement une fraction des agents révisent leur anticipation (et donc seuls

les acheteurs parmi cette fraction d'agents révisent leur composante d'adaptation).

Nous avons à présent 4 paramètres à analyser, il serait trop fastidieux d'étudier tous les résultats que nous pouvons obtenir en fonction de toutes les valeurs que peuvent prendre ces paramètres. C'est pourquoi, nous allons étudier les résultats dans le cas où la variable σ vaut principalement 0.2 et 0.8. Ces valeurs ont été choisies parce qu'à la figure 3.11, nous constatons que l'inefficience du marché a un comportement fort différent lorsque le biais de confirmation vaut 0.8 ou 0.2.

Notre but dans ce chapitre va être d'étudier le comportement de la composante d'adaptation pour chacun des agents au fil du temps et de voir dans quel cas l'inefficience du marché est la plus faible. Ces comportements seront analysés en fonction de la proportion d'agents ayant révisé leur anticipation, du biais de confirmation (principalement pour les valeurs données ci-dessus) et de la composante d'adaptation attribuée aux agents le jour de l'ouverture du marché.

Tout au long de ce chapitre, notre marché comptera 500 agents présents quotidiennement.

4.1 Modification totale de la composante d'adaptation : $\lambda = 1$

Lorsque la variable λ vaut 1, les agents, le jour j , vont réviser leur anticipation de la façon suivante :

$$\alpha_{j+1}^{a,i} = \begin{cases} \frac{P_{j+1} - \Delta^i P}{P_j - \Delta^i P} & \text{si } i \text{ est acheteur} \\ \alpha_j^{a,i} & \text{si } i \text{ est vendeur} \end{cases}$$

Nous sommes dans la situation où la modification de la composante d'adaptation n'est pas bornée, sa valeur peut passer en un jour d'un extrême à l'autre.

Beaucoup d'analyses et d'interprétations sont basées sur l'évolution du prix de l'actif au cours du temps. C'est pourquoi, il est intéressant d'observer d'abord comment varie le prix lorsque les acheteurs révisent leur composante d'adaptation.

La figure 4.1 nous confirme l'action du commissaire priseur qui entraîne une chute rapide du prix. Cette baisse importante du prix est suivie d'une stabilisation qui devrait provenir d'un changement de position des agents.

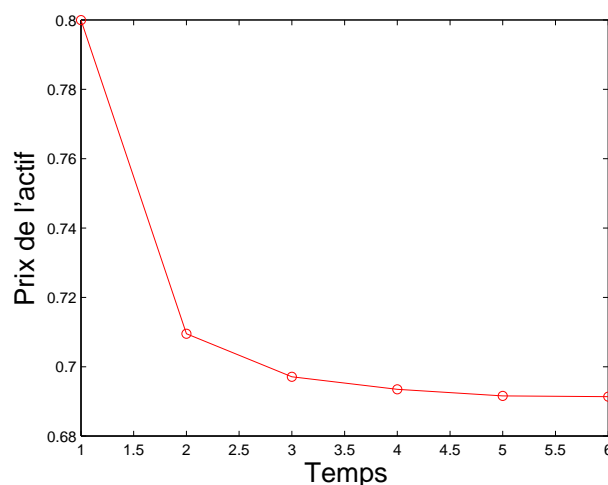


FIGURE 4.1 – Prix de l'actif en fonction du temps. Valeurs des paramètres : $\alpha_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, $P_0 = 0.8$, $\sigma = 0.2$ et $N = 500$.

Avec ces paramètres, le marché se termine (cela signifie que le prix a convergé) en 6 jours. Nous pouvons également constater qu'il n'est pas efficient.

4.1.1 Évolution de la composante d'adaptation

Considérons dans un premier temps que tous les agents révisent leurs anticipations chaque jour. Par les différentes contraintes fixées au départ, cela signifie que tous les acheteurs à la période j révisent leur composante d'adaptation pour former leur anticipation le jour $j + 1$.

Si tous les agents considèrent au départ le prix du passé et l'interaction sociale avec le même poids pour former leur anticipation, i. e. $\alpha_0 = 0.5$, observons comment évolue la composante d'adaptation des agents au fil du temps (figure 4.2).

Constatons tout d'abord à la figure 4.2 que les valeurs des α ne sont pas fort diversifiées. En effet, il y a 500 agents sur le marché et à peine 20 valeurs de α différentes. Comme nous l'avions prédit, nous observons sur ces graphes la variation en un jour de certaines composantes d'adaptation d'un extrême à l'autre. Par contre ce que nous ne pouvons pas savoir, c'est que cela se produit uniquement d'une valeur de α minimale vers une valeur maximale. De plus, à partir du cinquième jour, les agents conservent leur composante d'adaptation. Lorsque $(1 - \sigma) = 0.8$, les valeurs des composantes d'adaptation lorsque le prix a convergé sont peu nom-

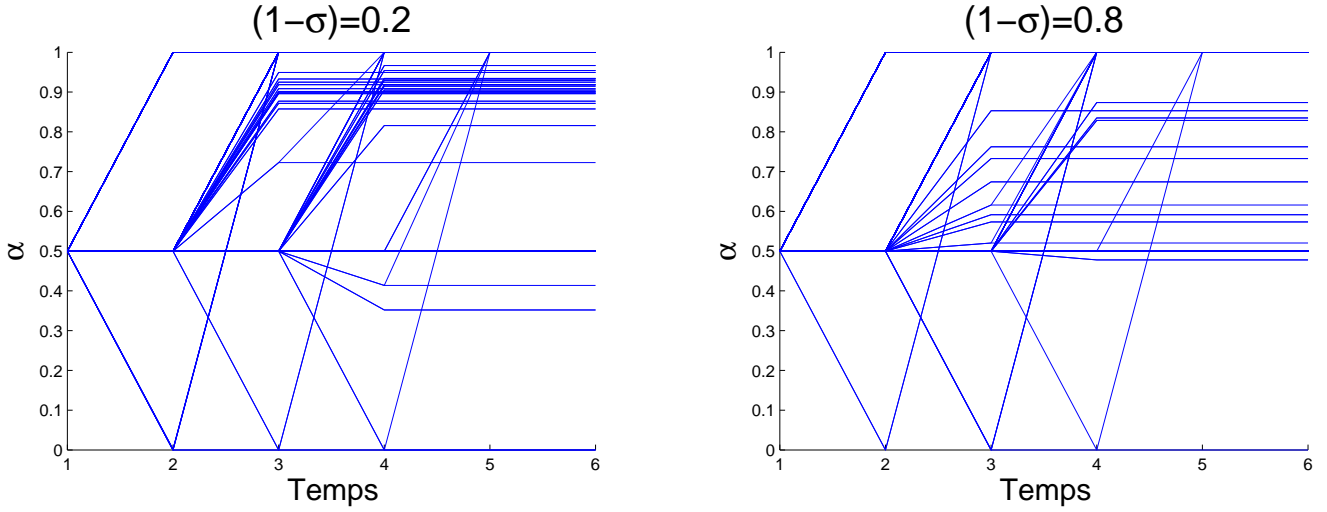


FIGURE 4.2 – Évolution de la composante d'adaptation de tous les agents au cours du temps. Gauche : $(1 - \sigma) = 0.2$; droite : $(1 - \sigma) = 0.8$. Valeurs des paramètres : $\alpha_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, $P_0 = 0.8$ et $N = 500$.

breuses, elles valent 1 ou sont réparties dans $[0.5, 1]$. Par contre, lorsque le biais de confirmation vaut 0.8, le jour final, nous observons un certain regroupement des valeurs de α dans $[0.8, 1]$.

D'un point de vue économique, ces résultats sont fortement influencés par la valeur initiale du prix. Les agents dont la première anticipation est faible vont tenter de l'augmenter beaucoup afin que la suivante soit proche du prix, pour cela, ils doivent faire croître leur composante d'adaptation. Nous constatons donc dans un premier temps une croissance générale des α . Leur stabilisation rapide s'explique par une non variation du prix. Après quelques jours, le prix ne bouge presque plus, les agents sont satisfaits de leurs anticipations, ils n'ont donc plus besoin de réviser leur composante d'adaptation.

Lorsque le biais de confirmation est faible, les agents considèrent l'information extérieure. Nous savons que le prix chute par l'action du commissaire priseur, nous avons donc $P_j < P_{j+1}$. Si des acheteurs avec des anticipations presque opposées se rencontrent, leur composante augmentera légèrement, alors que s'ils ont la même anticipation, que celle-ci soit grande ou petite, leur α vaudra 1 (ou presque). Lorsque le biais de confirmation est grand, les agents ont tendance à formuler leur anticipation en considérant d'une part le prix du passé et d'autre part leur anticipation précédente. Dans ce cas, si leur anticipation précédente était petite, les acheteurs vont revoir leur composante d'adaptation légèrement à la hausse.

C'est pour cela, que les composantes d'adaptation sont réparties plus largement à travers l'intervalle $[0.5, 1]$. Si, par contre, leur anticipation était grande (supérieure au prix), leur prochaine composante d'adaptation vaudra 1. Après plusieurs jours, les anticipations des agents ayant adapté leur composante d'adaptation seront proches du prix, ils n'auront donc plus besoin de modifier leur anticipation et donc leur composante d'adaptation non plus.

Si nous avons réalisé ces mêmes graphes avec un prix initial petit (ex : 0.2), nous aurions obtenu une forte croissance générale des composantes d'adaptation également, mais avec des valeurs finales de α beaucoup plus diversifiées dans $[0, 1]$.

Nous aurions pu observer les mêmes phénomènes si nous avions choisi un α_0 différent. Avec $\alpha_0 < 0.5$, le marché converge moins rapidement, mais les composantes d'adaptation varient de la même façon et leur valeur finale sont identiques. Si $\alpha_0 > 0.5$, les résultats sont à nouveau les mêmes et ils se produisent plus rapidement.

Puisque nous avons une idée de comment se comportent les composantes d'adaptation des agents prises séparément, observons à présent leur moyenne (figure 4.3).

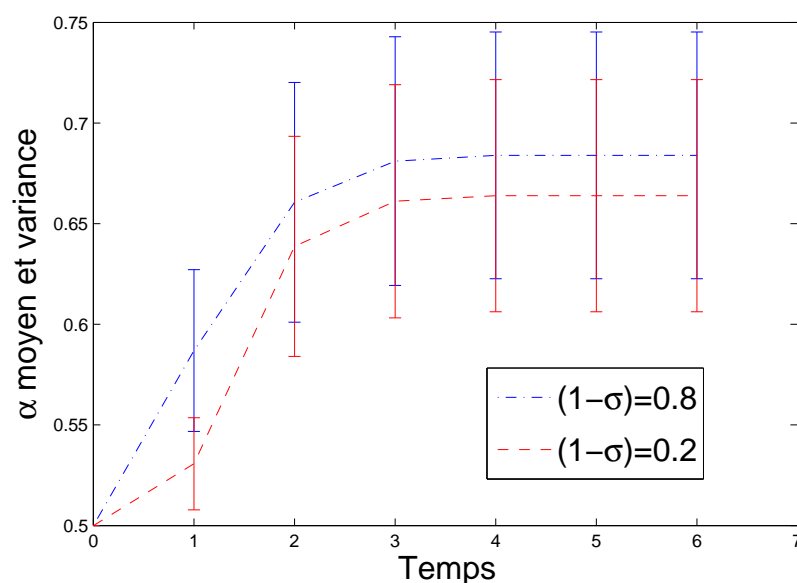


FIGURE 4.3 – Moyenne et variance des composantes d'adaptation de tous les agents. Valeurs des paramètres : $\alpha_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, $P_0 = 0.8$, et $N = 500$.

Nous observons à la figure 4.3 que la moyenne des α a tendance à augmenter rapidement les premiers jours et puis à se stabiliser. Cela confirme nos explications par rapport à la figure 4.2. Si la croissance est moins directe dans le cas où $(1 - \sigma) = 0.2$, cela provient du fait que les anticipations sont uniformément distribuées, les agents ont donc plus de chance d'échanger leurs informations avec un de leurs pairs dont l'avis est fortement différent. De plus, sur ce graphe, nous constatons que lorsque la composante d'adaptation est stabilisée, dès le 4ème jour, la variance est grande. Cela montre l'influence des agents qui ne sont jamais acheteurs et dont la composante d'adaptation reste 0.5. Ces agents doivent être plus nombreux dans le cas où le biais de confirmation est faible parce que nous avons constaté un rassemblement des α autour de 0.9, et pourtant leur moyenne est plus faible que lorsque le biais de confirmation est grand.

Dans le même esprit que lors de l'interprétation des graphes précédents, observons, la répartition des agents en fonction de la valeur de leur composante d'adaptation finale (figure 4.4), une fois que le marché a atteint un état d'équilibre, où le prix ne varie plus. La seconde ligne correspond à un zoom du rectangle inférieur des graphes de la première ligne.

Précisons que les agents représentés en jaune sont ceux qui ont au moins été acheteurs un jour. Nous n'avons d'information ni sur le/les jours où cela a eu lieu, ni s'ils étaient toujours acheteurs à la fin du marché.

Constatons, dans un premier temps, qu'une majorité des agents restent vendeurs durant toute la durée du marché (en bleu). Nous pouvons imaginer que ces agents correspondent aux agents dont les anticipations initiales sont très faibles. De plus, afin de conserver une anticipation inférieure à $P_j - c$, ils ont dû soit ne pas interagir avec d'autres agents (cela est possible même lorsque le biais de confirmation est faible), soit ne rencontrer que des agents ayant une opinion similaire.

Nous observons également que un plus grand nombre d'agents ont une anticipation finale égale à 1 lorsque le biais de confirmation est grand. Ils ont en effet moins de contraintes, leur composante d'adaptation est calculée généralement uniquement avec les prix et leur propre anticipation. Par contre, dans le cas où le biais de confirmation est faible, l'anticipation des autres agents entre également en compte lors du calcul du α . Ce dernier est donc plus nuancé et ne prend pas immédiatement des valeurs extrêmes.

Les résultats affichés sur ces graphes ont été testés pour des valeurs différentes de γ et de α_0 . Lorsque seule une portion des agents révisent leurs anticipations,

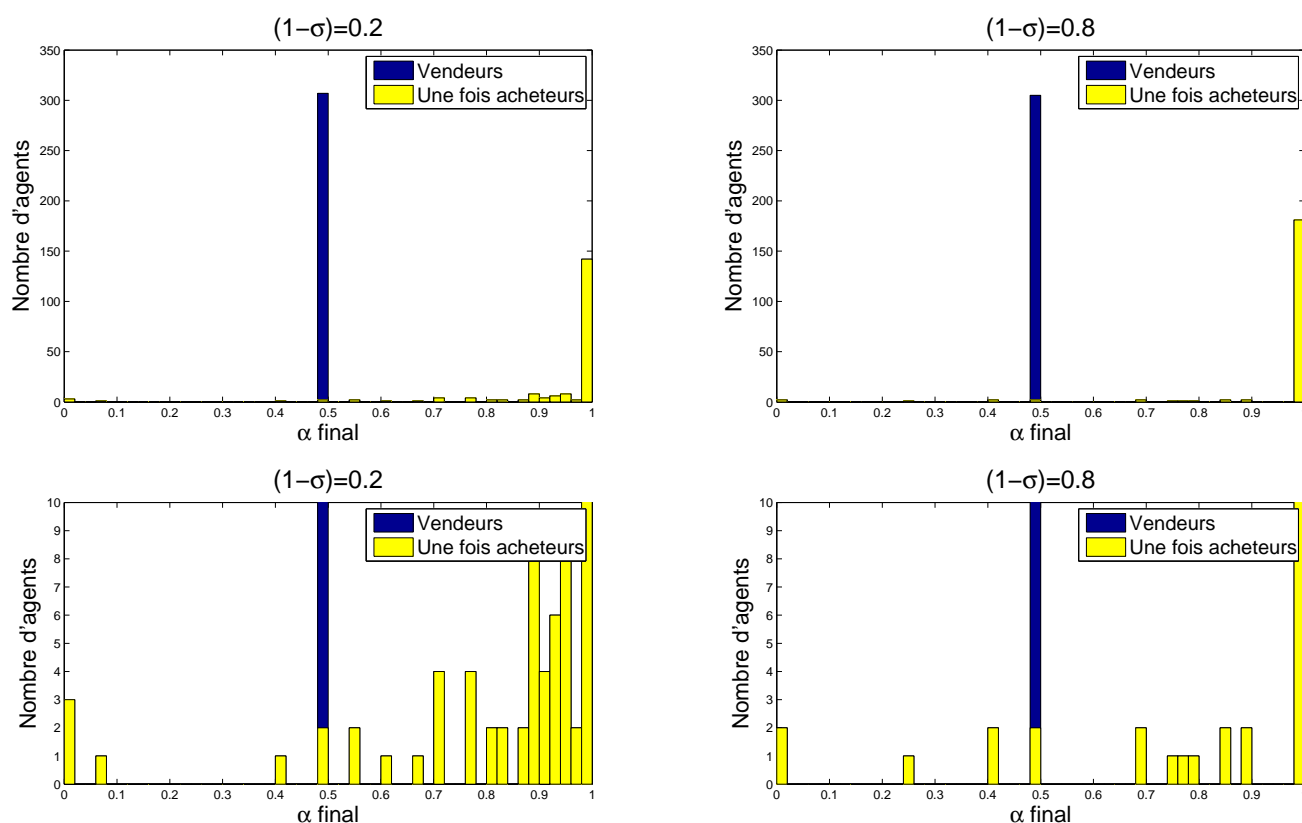


FIGURE 4.4 – Répartition des agents selon la composante d'adaptation (α) finale. Gauche : $(1 - \sigma) = 0.2$; droite : $(1 - \sigma) = 0.8$. La deuxième ligne est un zoom du rectangle inférieur de la première ligne. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$ et $\gamma = 1$

la composante d'adaptation converge de la même manière avec une pente légèrement plus faible lorsque $\sigma = 0.2$ et plus forte lorsque $\sigma = 0.8$. La moyenne des α augmente, et leur répartition à la fin est à peu près identique. Le seul changement est au niveau du temps de convergence. Si l'on utilise les mêmes valeurs des paramètres, le marché se termine en 22 jours (pour $\gamma = 0.5$), cela reste peu, mais tout de même plus conséquent que ce que nous avons observé.

Si nous attribuons aux agents une autre composante d'adaptation initiale, nous obtenons cette fois exactement les mêmes résultats, plus rapidement si $\alpha_0 > 0.5$ et plus lentement si $\alpha_0 < 0.5$.

4.1.2 Analyse de l'efficience du marché

Penchons-nous à présent sur l'étude de la convergence du prix et plus précisément sur les cas où le prix converge vers une valeur proche de 0.5.

L'histogramme de la figure 4.5 représente le nombre d'agents qui choisissent d'acheter ou de vendre par jour. Afin de faciliter son interprétation, rappelons qu'un agent prendra la décisions d'acheter si

$$P_{j+1}^{a,i} - P_j - c > 0$$

et de vendre si

$$P_j - P_{j+1}^{a,i} - c > 0.$$

Puisque le prix initial est élevé, il est facile de comprendre que le premier jour, peu d'agents ont une anticipation supérieure à $P_j + c$. Le nombre d'acheteurs est donc petit. Ensuite, ces agents qui ont acheté un actif vont réviser leur composante d'adaptation afin que leur anticipation corresponde au prix. Grâce au nouveaux α , les agents calculent leur anticipation et se positionnent en tant qu'acheteurs ou vendeurs. Le prix a chuté par rapport à la veille, il devrait donc y avoir plus d'acheteur. Cependant, grâce à la modification de leur composante d'adaptation, ces agents ont fait baisser leur anticipation. Ils sont donc à nouveau peu à avoir une anticipation supérieure à $P_j + c$. Pour ce qui est des vendeurs, leurs anticipations augmentent d'une part à cause du prix de l'actif qui reste malgré tout élevé, et, d'autre part, à cause de l'interaction sociale. Ces phénomènes se répètent jusqu'à ce que le prix de l'actif soit constant et que le marché s'arrête.

Les derniers jours du marché (à partir du 4ème jour dans ce cas-ci), il n'y a presque, voire plus d'acheteurs et le nombre de vendeurs diminue lui aussi fortement. En effet, nous avons montré que rapidement, le prix ne varie presque plus. Une grande partie des agents parviennent à obtenir une anticipation tellement

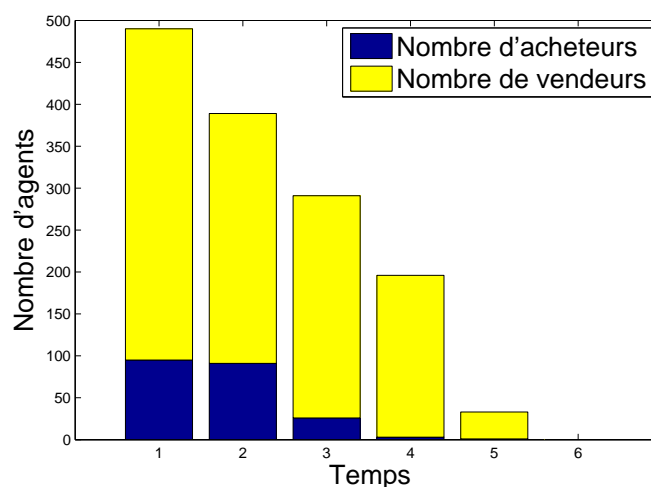


FIGURE 4.5 – Nombre d’acheteurs et de vendeurs par jour. Valeurs des paramètres : $\alpha_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, $P_0 = 0.8$, $\sigma = 0.2$ et $N = 500$.

proche du prix (plus proche que c), qu’ils ne souhaitent plus participer au marché. Cela entraîne son arrêt.

Observons l’inefficience du marché ainsi que le temps de convergence de celui-ci en fonction de la composante d’adaptation initiale donnée aux agents. Afin de savoir si les résultats obtenus sont intéressants, nous les comparerons au cas où les agents ne révisaient pas leur composante d’adaptation (figure 4.6).

La première conclusion à tirer de cette figure est qu’il est intéressant d’adapter la stratégie des agents. En effet, d’un point de vue de l’inefficience du marché, lorsque le biais de confirmation est grand, nous obtenons de meilleurs résultats (lorsque α_0 est petit). Nous constatons que, lorsque le biais de confirmation est petit, les résultats sont identiques à la situation dans laquelle les agents conservaient leur composante d’adaptation. En ce qui concerne le temps de convergence, lorsque $\alpha_0 = 0$, il faut à peu près 100 jours pour que le marché converge lorsque le biais de confirmation est faible, alors qu’il en fallait presque 1000 si les agents ne révisaient pas leur α . Pour certains α_0 , il faut par contre légèrement plus de temps lorsque le biais de confirmation est petit que dans le cas où les agents conservaient leur composante d’adaptation, mais cette différence est minime.

Nous constatons que l’inefficience du marché est fonction de α_0 . Lorsque α_0 croît, l’inefficience croît à son tour. En associant ce phénomène au temps de con-

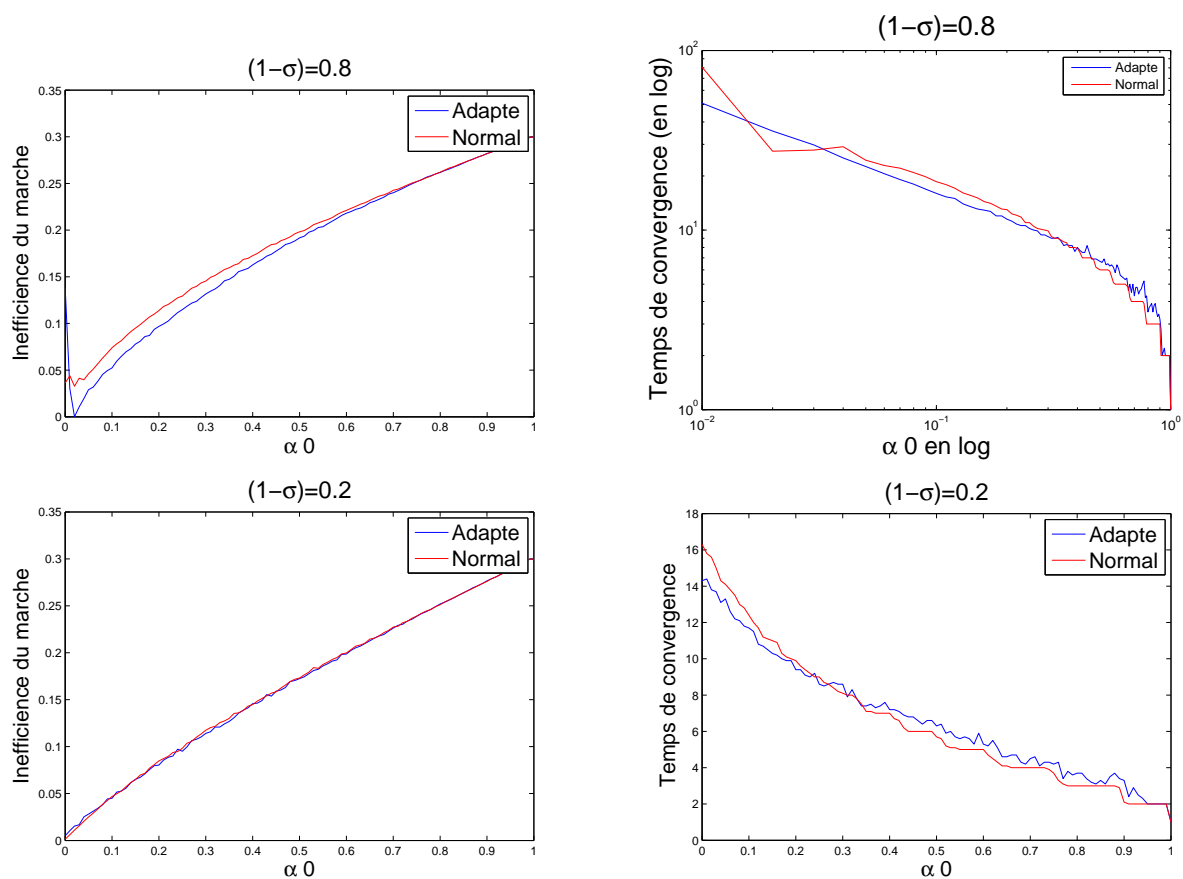


FIGURE 4.6 – Gauche : inefficiency du marché selon la composante d'adaptation de départ (α_0). Droite : temps de convergence du prix. Ligne 1 : $\sigma = 0.2$, ligne 2 : $\sigma = 0.8$. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$ et $\gamma = 1$.

vergence qui lui est décroissant en fonction de α_0 , nous pouvons supposer avec une certaine limite que plus le marché met du temps à converger, plus il est efficient.

Grâce à la figure 4.6, nous nous attendons à ce que l'inefficiency du marché soit fonction de α_0 , voyons à la figure 4.1.2 ce qu'il en est pour les autres paramètres.

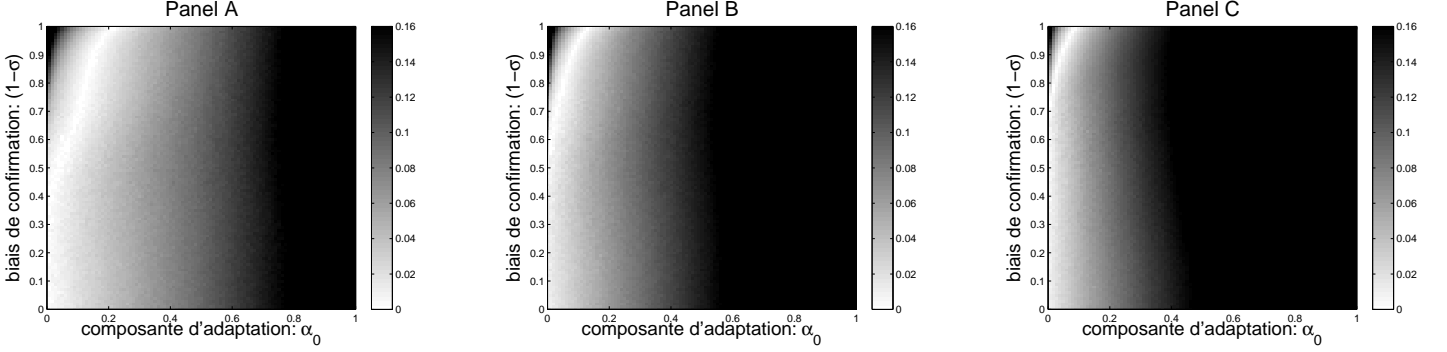


FIGURE 4.7 – Inefficiency du marché selon la composante d'adaptation de départ (α_0) et le biais de confirmation ($(1-\sigma)$). Variation de γ selon les panels : de gauche à droite, $\gamma = 0.2, 0.5$ et 1. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$, 10 simulations.

Considérons, pour commencer, les cas où la composante d'adaptation de départ est grande. Ce sont les parties représentées où l'inefficiency du marché est la pire. De fait, le prix de départ est élevé et les agents donnent directement un poids considérable à ce prix pour former leur anticipation. Il est logique que les anticipations soient très vite proches du prix, le marché convergera donc extrêmement rapidement (comme cela est montré à la figure 4.6) et le prix restera fortement éloigné de la valeur fondamentale.

Si nous voulons une meilleure efficiency, il faut étudier les cas où la composante d'adaptation de départ est plus petite.

Comme nous l'a montré la figure 4.6, lorsque le biais de confirmation est faible, l'inefficiency du marché se comporte de la même manière que dans le cas où les agents conservaient leur α . Elle est croissante en fonction de la composante d'adaptation de départ. A l'ouverture du marché, si les agents donnent un poids important aux informations provenant des autres, leurs anticipations auront tendance à se regrouper dès le second jour. De plus, comme certains d'entre eux auront révisé leur composante d'adaptation, ils donneront à leurs pairs une information pratiquement correcte. Les agents seront donc tous influencés par les acheteurs. Le

prix convergera.

Nous constatons à la figure 4.1.2 que nos suppositions ont bien été vérifiées. En effet, pour un biais de confirmation fixé (grand), l'inefficience du marché est non-monotone en fonction de la composante d'adaptation de départ. Ce cas correspond à un biais de confirmation élevé, les agents ne conservent que leurs propres informations et rejettent celles provenant de l'extérieur. La figure 4.8 représente l'inefficience du marché par rapport à la composante d'adaptation lorsque les agents agissent de la sorte.

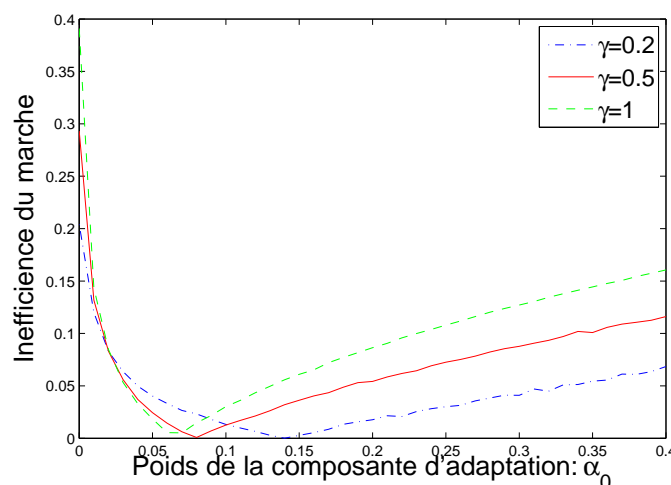


FIGURE 4.8 – Inefficiency du marché selon la composante d'adaptation de départ (α_0). En bleu : $\gamma = 0.2$, $(1 - \sigma) = 0.85$; en rouge : $\gamma = 0.5$, $(1 - \sigma) = 0.9$; en vert : $\gamma = 1$, $(1 - \sigma) = 0.95$. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$, $\lambda = 1$, 10 simulations.

Quelle que soit la valeur de γ , pour les valeurs des paramètres reprises à la figure 4.8, l'inefficience du marché a la même allure.

Lorsque α_0 est extrêmement petit, le marché n'est vraiment pas efficient. Au début du marché, les agents conservent leur anticipation de jour en jour. Seuls les acheteurs vont modifier leur composante d'adaptation afin que leur anticipation soit égale au prix. Les anticipations sont donc distribuées dans $[0, 1]$ pour une majorité des agents et sont supérieures au prix (puisque entre-temps celui-ci a chuté) pour les autres. Le prix se stabilise donc rapidement vers une valeur nettement supérieure à 0.5. Le marché prend cependant du temps à s'arrêter parce que le prix est stabilisé certes, mais il n'a pas convergé, il varie toujours, mais très peu.

Sur cette coupe, l'efficacité est la meilleure lorsque α_0 est entre 0.05 et 0.15 (selon γ). Les agents considèrent très partiellement le prix pour former leur anticipation, mais cette faible quantité doit permettre d'augmenter légèrement les anticipations des agents qui étaient faibles à la base. Par contre, les agents ayant surestimé le prix de l'actif vont être acheteurs, ils reverront donc leur anticipation doublement à la baisse par l'effet de la chute du prix et de la modification de leur composante d'adaptation.

Si nous nous penchons à présent sur le biais de confirmation, nous constatons que l'inefficacité du marché est soit constante (pour des α_0 grands) soit monotone. Si nous traçons une ligne de haut en bas sur la figure 4.1.2, nous constatons que pour un α_0 extrêmement petit ou moyen, le marché est non efficace pour un grand biais de confirmation. Puis, au fur et à mesure que le biais de confirmation diminue, le marché devient de plus en plus efficace.

Il nous reste à analyser l'effet de la variable γ . Lorsque la proportion d'agents révisant leur anticipation augmente (de gauche à droite pour les graphes de la figure 4.1.2), le marché est de plus en plus rapidement non efficace selon la variation α_0 . Pour des α_0 égaux, le marché serait moins efficace si la proportion d'agents révisant leur anticipation était grande.

L'efficacité du marché, dans ce cas-ci, dépend des trois paramètres γ , σ et α_0 . Lorsque le biais de confirmation est faible, le marché est le plus efficace lorsque α_0 est extrêmement petit. Par contre, en situation de faible confirmation des tendances, pour que le marché soit le plus efficace, il faut que α_0 soit petit, mais pas trop (selon γ).

4.1.3 Remarque : révision par tous les agents

Nous allons montrer ce qui se produit lorsque tous les agents qui révisent leur anticipation adaptent leur composante d'adaptation. Nous avons déjà expliqué qu'il n'était pas utile pour les vendeurs de le faire mais cela ne semble pas leur porter préjudice non plus de le faire. Cette section sert à justifier notre choix et à montrer ce que nous aurions obtenu si nous n'avions pas ajouté cette contrainte sur les acheteurs.

Afin de pouvoir comparer aux résultats que nous avons obtenus précédemment, analysons comment évolue la composante d'adaptation lorsque, au départ, tous les agents considèrent avec le même poids le prix du passé et l'interaction sociale pour former leur anticipation ($\alpha_0 = 0.5$).

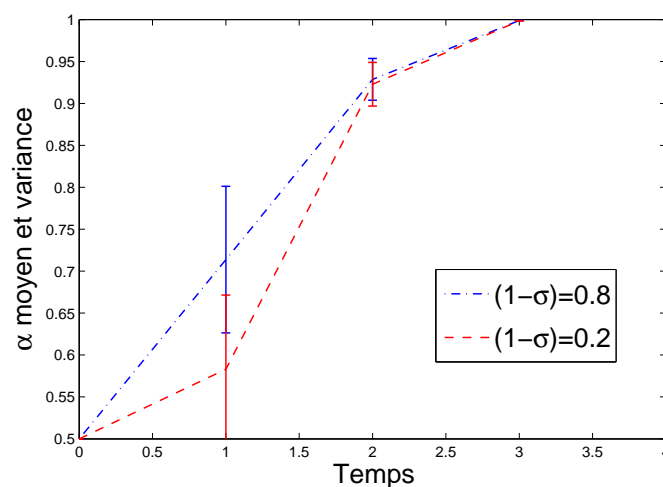


FIGURE 4.9 – Évolution de la composante d'adaptation. Valeurs des paramètres : $\alpha_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, $P_0 = 0.8$, et $N = 500$.

Nous constatons tout d'abord que le marché se termine très rapidement puisqu'il faut à peine 3 jours pour que le prix converge.

De plus, nous observons que la composante d'adaptation augmente fortement et que le dernier jour du marché, tous les agents ont $\alpha = 1$. En effet, la variance est nulle lorsque l'abscisse vaut 3. Tous les agents ont donc tendance à ne vouloir prendre en compte que le prix du passé. Nous pouvons imaginer que celui-ci ne varie presque plus entre le second et le troisième jour, ce qui implique cette composante d'adaptation et la fin du marché.

Observons ce qui se passe au niveau de l'efficience. Il peut être intéressant que le marché se clôture rapidement, à condition qu'il soit efficace.

Ici, malheureusement, le marché n'est vraiment pas efficace, même pour des valeurs d' α_0 infiniment petites, alors que c'était le cas lorsque seuls les acheteurs révisaient leur α . C'est pour ces raisons que nous avons choisi de travailler avec la contrainte que seuls les acheteurs pouvaient modifier leurs composantes d'adaptation.

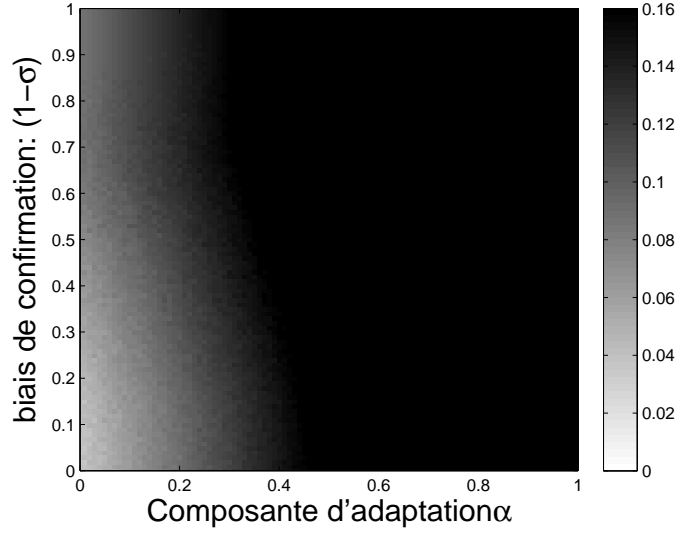


FIGURE 4.10 – Inefficiency du marché selon la composante d’adaptation de départ (α_0) et le biais de confirmation ($(1 - \sigma)$). Valeurs des paramètres : $\alpha_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, $P_0 = 0.8$, et $N = 500$.

4.2 Modification contrôlée de la composante d’adaptation : $\lambda \in]0, 1[$

Rappelons comment les agents pourront calculer leur composante d’adaptation lorsque $\lambda \in]0, 1[$.

Nous avons que

$$\hat{\alpha}_j^{a,i} = \frac{P_{j+1} - \Delta^i P}{P_j - \Delta^i P}$$

et

$$\alpha_j^{a,i} = \alpha_{j-1}^{a,i} + \lambda(\hat{\alpha}_j^{a,i} - \alpha_{j-1}^{a,i}).$$

Nous allons analyser les changements que cette nouvelle variable va produire sur l’inefficience du marché et comment la composante d’adaptation variera. Afin de limiter le nombre de paramètres qui peuvent varier, nous étudierons principalement les résultats en fonction de 3 valeurs de λ : 0.1, 0.5 et 0.8. Cela nous donnera suffisamment d’informations pour pouvoir interpréter les résultats obtenus.

Nous considérons toujours que l’ensemble des agents révisent leurs anticipations. Nous le précisons lorsque ce ne sera pas le cas.

4.2.1 Évolution de la composante d'adaptation

Comme dans le cas où $\lambda = 1$, nous allons étudier comment évolue la composante d'adaptation en ajoutant cette fois-ci cette nouvelle variable.

Bien que nous ayons montré que l'efficacité du marché était la meilleure lorsque α_0 est petit, nous allons à nouveau réaliser notre étude avec $\alpha_0 = 0.5$ afin de pouvoir observer les différents cas où les composantes d'adaptation diminuent. De plus, puisque ce fut le cas précédemment, nous pouvons supposer que la composante d'adaptation se conduira de la même manière quelle que soit la valeur de α_0 .

Observons comment évolue la moyenne des composantes d'adaptation en fonction du temps (figure 4.11).

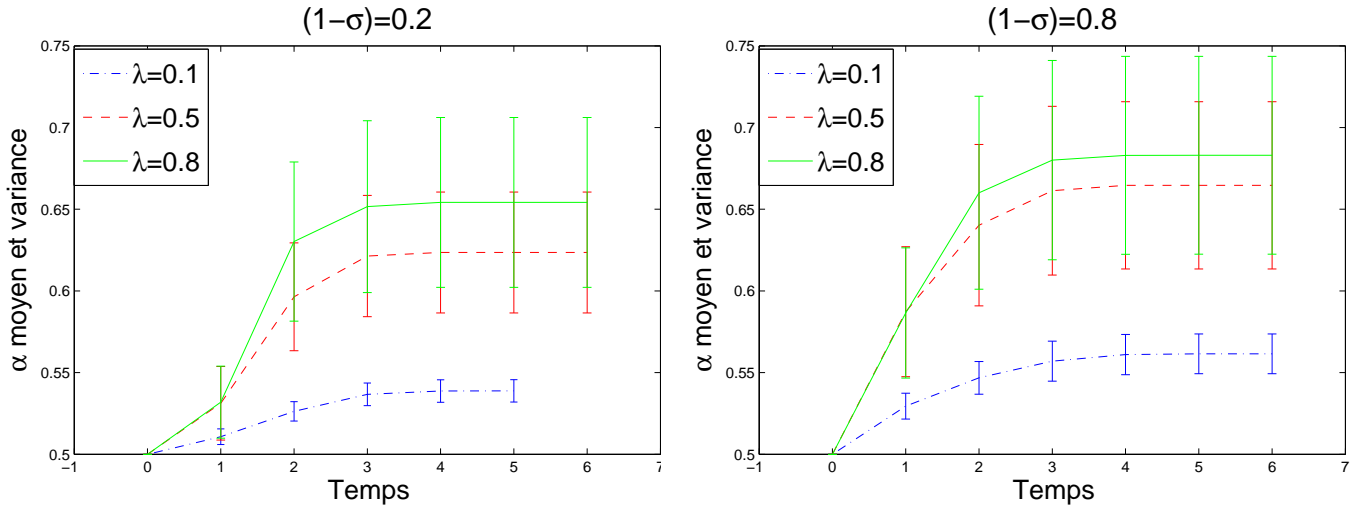


FIGURE 4.11 – Moyenne et variance des composantes d'adaptation de tous les agents pour trois valeurs de λ différentes. Valeurs des paramètres : $\alpha_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, $P_0 = 0.8$, et $N = 500$.

nous constatons que l'introduction de la variable λ n'influence pas la durée du marché, il converge aussi rapidement que lorsque λ valait 1.

Quand les agents n'englobent pas l'information extérieure, c'est-à-dire lorsque le biais de confirmation est grand, les composantes d'adaptation ont tendance à converger vers des valeurs plus grandes que lorsque le biais de confirmation est petit. Dans le cas où $\lambda = 0.1$, les composantes d'adaptation augmentent, mais

peu, de plus, elles ne sont pas fort dispersées dans $[0, 1]$. Plus λ augmente, plus α converge vers une valeur importante et avec une grande variance. Des résultats que nous avons déjà analysés dans la section 4.1, nous pouvons considérer que cela provient de l'influence des vendeurs et des agents dont la composante d'adaptation dépasse 1.

A la figure 4.12, nous avons tracé sous forme d'histogramme la coupe de la répartition des agents selon leur composante d'adaptation finale. S'ils ont été durant un jour au moins acheteurs, ils seront représentés en vert. La seconde ligne est un zoom de la partie inférieure des graphes de la première ligne.

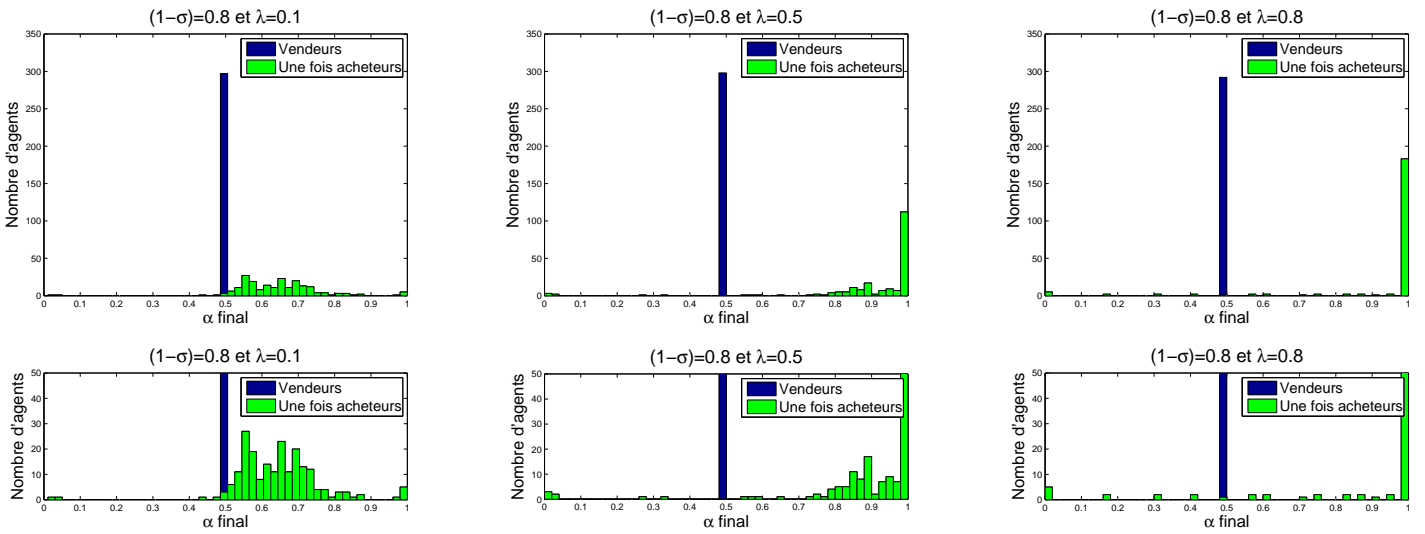


FIGURE 4.12 – Répartition des agents selon leur composante d'adaptation finale. Valeurs des paramètres : $\alpha_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, $P_0 = 0.8$, et $N = 500$.

Nous avons représenté cette coupe uniquement dans le cas de faible confirmation des tendances. Nous obtenions la même répartition dans le cas de forte confirmation des tendances.

Pour chaque valeur de λ , nous observons que le nombre d'agents vendeurs durant toute la durée du marché est constant. De plus, il y a un regroupement de la composante d'adaptation finale des acheteurs, pas autour des même valeurs certes, mais elles ne sont pas éparpillées dans $[0, 1]$. Ce rassemblement a tendance à se déplacer vers 1 lorsque la variable λ augmente. Dans le cas où $\lambda = 0.8$, les composantes d'adaptation finales sont distribuées similairement au cas traité à la

section 4.1.

Si nous avons posé $\alpha_0 = 0$, nous aurions obtenu ce même déplacement en fonction de λ . Par contre, le prix aurait mis beaucoup plus de temps à converger.

Afin d'étudier plus nettement l'influence du paramètre λ , nous allons représenter la valeur finale de la composante d'adaptation moyenne en fonction de cette variable (figure 4.13).

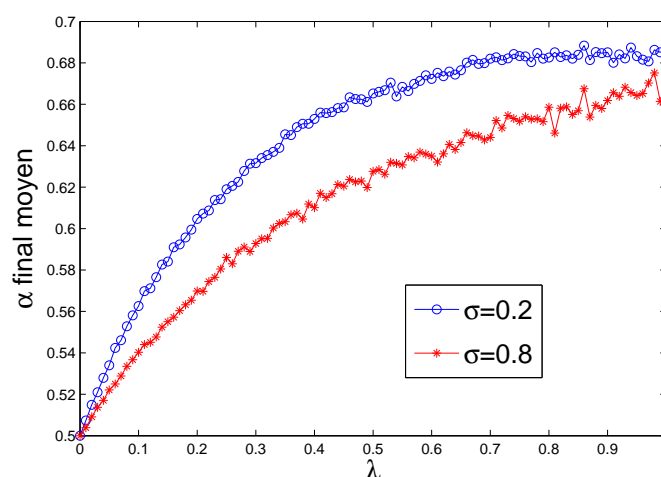


FIGURE 4.13 – Moyenne et variance des composantes d'adaptation de tous les agents pour trois valeurs de λ différentes. Valeurs des paramètres : $\alpha_0 = 0.5$, $\gamma = 1$, $P_0 = 0.8$, et $N = 500$.

Nous observons sur le graphe de la figure 4.13 que d'une part les composantes d'adaptation finales des agents dépendent de la variable λ et d'autre part, que leur moyenne est croissante en fonction de λ . Cette croissance est plus directe lorsque le biais de confirmation est faible ($\sigma = 0.8$).

En comparaison avec l'analyse de la section 4.1, nous pouvons affirmer que la variable λ n'a pas d'influence sur la moyenne des composantes d'adaptation finales que lorsqu'elle est faible (inférieure à 0.5). Dans les autres cas, les composantes d'adaptation convergent vers la même valeur que lorsque $\lambda = 1$.

4.2.2 Analyse de l'efficacité du marché

Dans cette section, nous allons étudier la valeur vers laquelle converge le prix du marché. Nous pourrions ainsi voir s'il est préférable que les composantes d'adaptation soient élevées (λ grand) ou faibles (λ petit).

Dans le cas où la variable λ était fixée à la valeur 1, nous avons vu que l'efficacité du marché dépendait des paramètres α_0 , σ et γ . Étudions à présent ce qu'il en est lorsque $\lambda \in [0, 1]$.

Comparons l'inefficacité du marché et le temps de convergence du prix que nous obtenons pour trois valeurs du paramètre λ par rapport au cas où les agents ne révisaient pas leur stratégie. Cela nous permettra de savoir s'il est intéressant pour les agents de réviser leur composante d'adaptation lorsque cette dernière évolue de façon contrôlée par le paramètre λ .

Nous avons choisi d'utiliser $\sigma = 0.2$ pour effectuer cette comparaison, nous aurions pu utiliser $\sigma = 0.8$ mais les résultats principaux que nous souhaitons mettre en avant dans la figure 4.14 sont identiques.

Précisons que les graphes de la première colonne ne sont pas parfaitement semblables. Le prix calculé lorsque les agents révisent leur stratégie varie légèrement d'une ligne à l'autre (donc en fonction de λ). Nous constatons que, lorsque α_0 est très proche de 0, le marché est plus efficace si les agents ne révisent pas leur stratégie pour chacun des λ . Par contre, dès que la composante d'adaptation initiale augmente légèrement, le marché est nettement plus efficace que dans le cas que nous traitons ici. Cela se marque d'autant plus lorsque λ est grand. Passé un certain seuil de α_0 , les prix deviennent égaux, que les agents révisent ou non leur stratégie.

Si l'on observe le temps nécessaire pour que le prix converge, nous constatons que comme dans le cas où $\lambda = 1$, le marché se termine beaucoup plus rapidement lorsque les agents révisent leur stratégie et que α_0 est petit. Lorsque α_0 est plus grand, les temps de convergence sont identiques.

Nous pouvons également déjà conclure, grâce à ces figures, que le marché est le plus efficace lorsque la variable α_0 est petite (mais pas trop), vérifions cela grâce aux graphes de la figure 5.1.

Ici encore, les graphes paraissent identiques. Pourtant, selon les panels (et donc selon λ), le dégradé que l'on observe dans le coin supérieur gauche est décalé vers

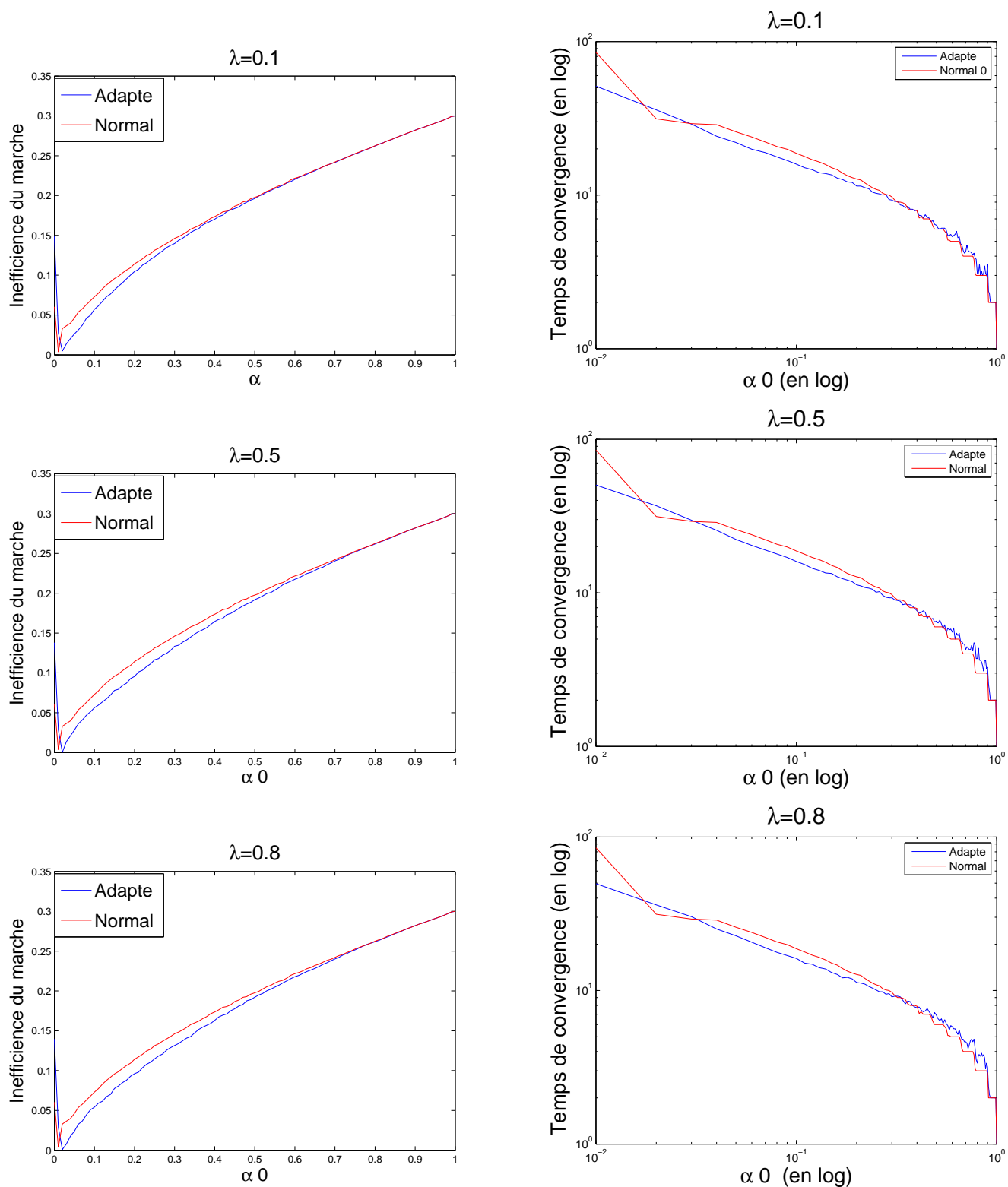


FIGURE 4.14 – Inefficiency du marché selon la composante d'adaptation de départ (α_0) et temps de convergence du prix. Variation de λ selon les panels : de haut en bas, $\lambda = 0.1, 0.5$ et 0.8 . Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$, $\sigma = 0.2$, 10 simulations.

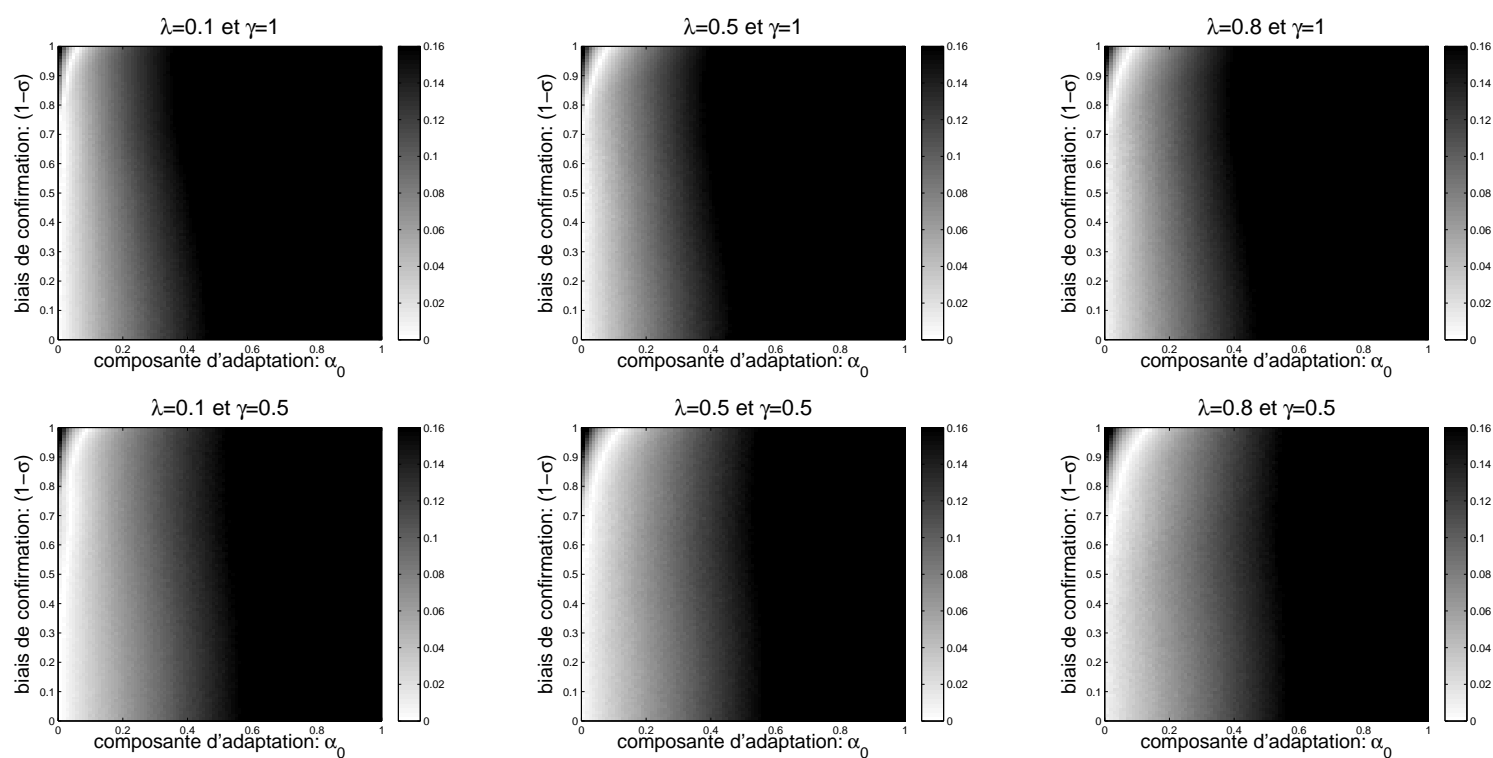


FIGURE 4.15 – Inefficiency du marché selon la composante d'adaptation de départ (α_0) et le biais de confirmation ($(1-\sigma)$). Variation de γ selon les panels : de gauche à droite, $\gamma = 0.2, 0.5$ et 1. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$, 10 simulations.

la droite.

Lorsque tous les agents révisent leurs anticipations (première ligne), le marché est généralement inefficent sauf lorsque la composante d'adaptation initiale est très faible. En effet, nous observons une bande très claire le long de l'axe vertical. Cette bande se déplace légèrement à droite lorsque le biais de confirmation est élevé.

Lorsque seule une portion des agents révisent leurs anticipations, en l'occurrence, ici, la moitié, les mêmes phénomènes que ce que nous venons d'expliquer se produisent. Cependant, il y a légèrement plus de valeurs pour lesquelles le marché est efficace (le dégradé est moins brutal).

Contrairement à nos attentes, l'ajout du paramètre λ n'améliore pas l'efficacité du marché. Nous pouvons tirer des conclusions et des interprétations économiques similaires au cas où $\lambda = 1$. Le seul changement produit se situe au niveau de l'évolution de la composante d'adaptation. Le processus de convergence est légèrement ralenti.

Nous avons montré dans ce chapitre qu'il était possible pour les agents de modifier leur stratégie au fil des jours afin de faire un minimum de perte.

Il a été établi qu'il était plus efficace que seuls les agents ayant acheté et modifié leur anticipation à la période antérieure révisent leur stratégie, et donc, leur composante d'adaptation.

Lorsque les modifications quotidiennes de la composante d'adaptation des agents n'étaient pas bornées $\lambda = 1$, l'efficacité était nettement meilleure lorsque la composante d'adaptation initiale était extrêmement proche de 0, ou proche (dans le cas de faible confirmation des tendances). Nous avons observé exactement le même phénomène lorsque $\lambda \in [0, 1]$. Cependant, lorsque la composante d'adaptation initiale était légèrement plus élevée, nous avons immédiatement une croissance forte de l'inefficacité du marché.

Chapitre 5

Analyse d'un marché non-homogène

En conservant la modélisation que nous avons utilisée dans les chapitres précédent, nous allons étudier à présent un autre type de marché. Ce marché fonctionne exactement de la même manière que ceux décrit antérieurement. Par contre, les agents qui y sont présents quotidiennement sont inégaux.

Nous caractériserons cette inégalité par un choix de l'agent de donner au départ du marché un poids différent aux deux tendances pour former son anticipation. Nous classerons les agents en deux groupes. Tous les agents d'un même groupe auront la même composante d'adaptation de départ et ils la conserveront durant toute la durée du marché. Si nous établissons un lien avec le chapitre 4, cela correspond à $\lambda = 0$, comme dans les chapitres antérieurs.

Il y a une multitude de façon de former les groupes et d'y répartir les agents. Afin de rendre notre étude intéressante, les deux groupes seront formés de façon aléatoire afin que tous les agents avec une faible/grande anticipation initiale ne se retrouvent pas dans le même groupe. Nous n'avons pas de contrainte par rapport au nombre d'agents devant appartenir à chaque groupe. Nous avons travaillé avec deux méthodes bien distinctes. D'une part, nous avons considéré que les deux groupes comportaient le même nombre d'agents à savoir $N/2$. Avec cette méthode, nous avons étudié les résultats en faisant varier les composantes d'adaptation des agents de chaque groupe dans l'intervalle $[0, 1]$. D'autre part, nous avons imaginé l'introduction d'une nouvelle variable : Q . Cette dernière correspond à la proportion d'agents appartenant au premier groupe. Par exemple, si $N = 1000$ et $Q = 0.73$, alors le premier groupe comptera $Q.N = 730$ agents alors que seuls $(1 - Q)N = 270$ agents feront partie du second groupe.

Nous chercherons à nouveau pour quelles valeurs des paramètres le marché est le plus efficient. Nous tenterons d'analyser quels effets aura l'ajout de cette

nouvelle contrainte sur le temps de convergence du prix, l'évolution des différents paramètres.

5.1 Répartition des agents en deux groupes égaux

Comme cela a été expliqué brièvement, nous allons, dans un premier temps, travailler avec deux groupes composés du même nombre d'agents.

Nous avons choisi d'attribuer aux groupes d'agents trois catégories de composantes d'adaptation différentes (figure 5.1). Dans le premier cas (colonne de gauche), les composantes d'adaptation de chacun des groupes sont éloignées de 0.5, dans le second (colonne centrale) elles se situent aux valeurs extrêmes de l'intervalle $[0, 1]$ alors que dans le troisième (colonne de droite), elles sont très proches. La seconde ligne correspond au temps de convergence du prix sur le marché. Pour chacune des catégories, la moyenne arithmétique entre les composantes d'adaptation attribuées à chaque groupe est 0.5.

Précisons que nous avons choisi de travailler avec une échelle plus grosse pour réaliser ces figures parce que lorsque peu d'agents révisent leur anticipation, il faut énormément de temps au prix pour converger.

Comme dans toutes les analyses qui ont été effectuées précédemment, nous constatons que l'inefficience du marché ainsi que le temps de convergence dépendent des trois paramètres α , γ et σ (bien que cela soit moins marqué pour ce dernier paramètre). Nous constatons que l'inefficience est croissante en fonction de γ , donc, plus le nombre d'agents révisant leur anticipation est grand, plus le marché se termine rapidement et plus son prix converge loin de la valeur fondamentale. Alors que, si peu d'agents révisent leur anticipation, les agents dont l'anticipation initiale est faible ont plus de temps pour faire pencher la balance et influencer la convergence du prix vers une valeur plus proche de 0.5.

Comparons à présent les résultats en fonction des composantes d'adaptation attribuées à chaque groupe d'agents. Le marché est le plus efficient lorsque les valeurs des composantes d'adaptation (pour toutes les valeurs de γ et du biais de confirmation) sont toutes les deux proches de 0.5. Les résultats de la première et de la seconde colonne (figure 5.1) sont semblables. Nous pouvons donc dire qu'à partir d'un certain seuil, le fait que les composantes d'adaptation soient plus ou moins éloignées entre elles et de 0.5 n'a plus d'influence sur l'efficience du marché.

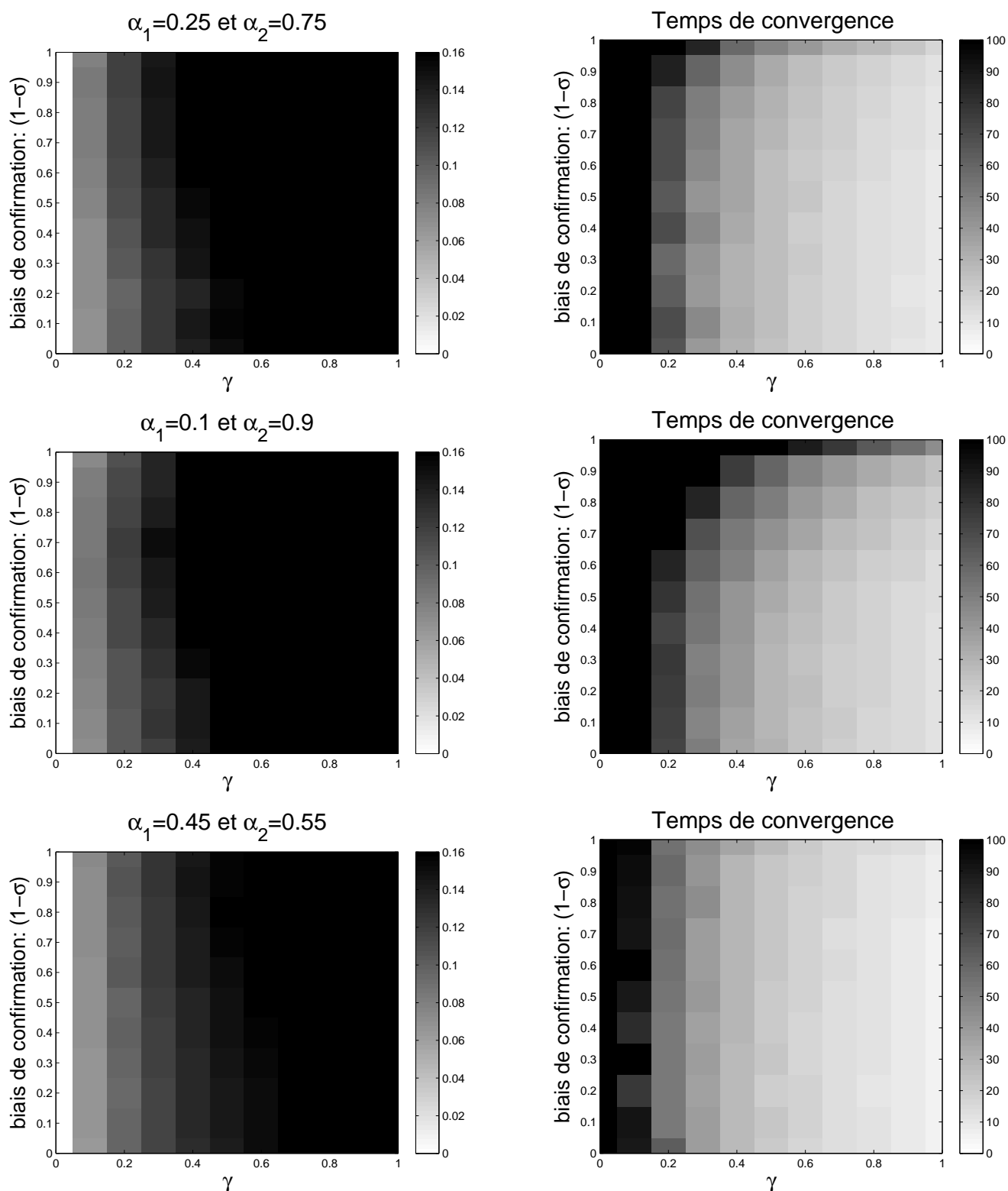


FIGURE 5.1 – Inefficiency du marché selon la proportion d'agents révisant leur anticipation (γ) et le biais de confirmation ($(1-\sigma)$). Variation de la composante d'adaptation attribuée à chaque groupe. Seconde colonne : Temps de convergence du prix. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$, 10 simulations.

Appliquons le procédé inverse. Fixons deux biais de confirmation (nous travaillons toujours avec $\sigma = 0.2$ et $\sigma = 0.8$) et deux proportions différentes d'agents révisant leur anticipation. Pour le paramètre γ , nous avons choisi la valeur extrême 1 et le cas où seule la moitié des agents révisent leur anticipation. Avec ces valeurs de paramètres fixées, observons comment évolue l'inefficience du marché pour toutes les valeurs d' α qu'il est possible d'attribuer à chacun des groupes d'agents (figure 5.2).

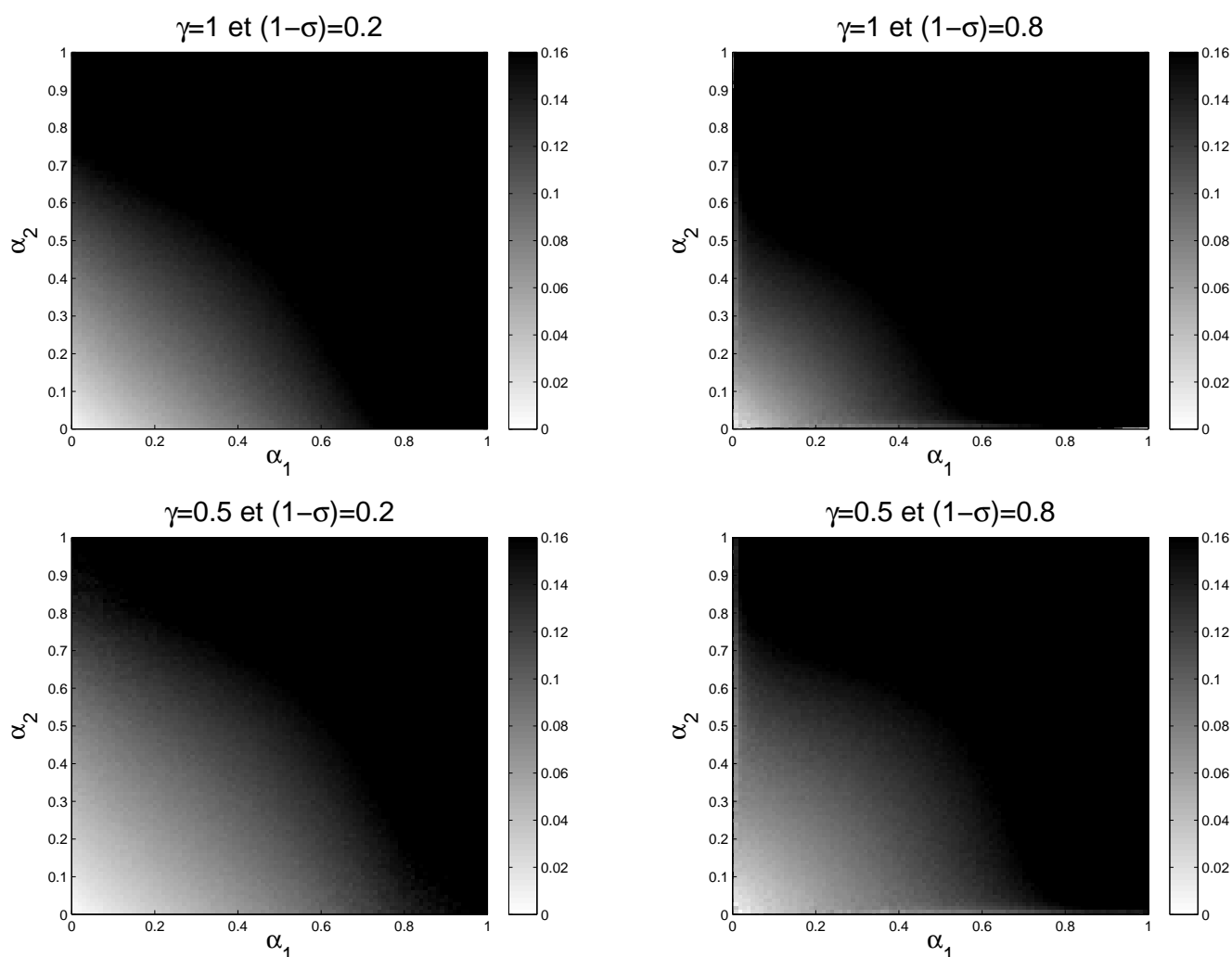


FIGURE 5.2 – Inefficience du marché selon la composante d'adaptation des agents du premier groupe (α_1) et celle des agents du second groupe (α_2). Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$, nombre d'agents par groupe : 250, 10 simulations.

Comme nous pouvions le prévoir, ces graphes sont symétriques selon la première bissectrice.

De façon semblable à la figure 5.1, nous obtenons de meilleurs résultats lorsque moins d'agents révisent leur anticipation et que le biais de confirmation ($1 - \sigma$) est faible. Les coins supérieurs gauches (et inférieurs droits) correspondent aux cas où les composantes d'adaptation des deux groupes sont fortement éloignées (mais cette fois pas forcément centralisées à 0.5). Nous constatons que pour ces valeurs des composantes d'adaptation, le marché est particulièrement inefficace.

Quelles que soient les valeurs des paramètres γ et σ , lorsque les agents sont divisés en deux groupes égaux en nombre, le marché est le plus efficace si les composantes d'adaptation des deux groupes sont faibles. Le prix de l'actif converge donc proche de la valeur fondamentale lorsque les agents donnent plus d'importance à l'interaction sociale qu'au prix du passé pour former leur anticipation. Ce phénomène est accentué lorsque les agents englobent l'information provenant de leurs pairs. Ces résultats ne diffèrent pas du cas où les agents étaient homogènes (chapitre 3).

Cependant, dans le cas de faible confirmation des tendances ($(1 - \sigma) = 0.8$), nous observons un phénomène particulier lorsque les agents d'un des groupes ont une composante d'adaptation nulle, c'est-à-dire qu'ils considèrent uniquement leur prévision antérieure pour former leurs anticipations. Cela se produit quelle que soit la proportion d'agents révisant leur anticipation. Nous avons représenté ces cas particuliers à la figure 5.3, ils correspondent donc à des coupes au niveau de la ligne horizontale inférieure (au verticale le plus à gauche) sur chacun des graphes de la figure 5.2.

Dans le cas de forte confirmation des tendances (graphe de gauche de la figure 5.3), plus la composante d'adaptation des agents du premier groupe augmente, moins le marché est efficace. Ce phénomène est identique au cas où la composante d'adaptation des agents du second groupe n'est pas nulle. Nous l'avons constaté auparavant, lorsque les composantes d'adaptation des deux groupes sont fortement éloignées, le marché est inefficace.

Par contre, si la composante d'adaptation d'un des deux groupes est nulle et que le biais de confirmation est élevé, l'inefficace n'est pas croissante en fonction de la composante d'adaptation de l'autre groupe, elle est extrêmement variable (graphe de droite de la figure 5.3). Si nous interprétons ce cas, nous sommes dans la situation où la moitié des agents forment leur anticipation en considérant unique-

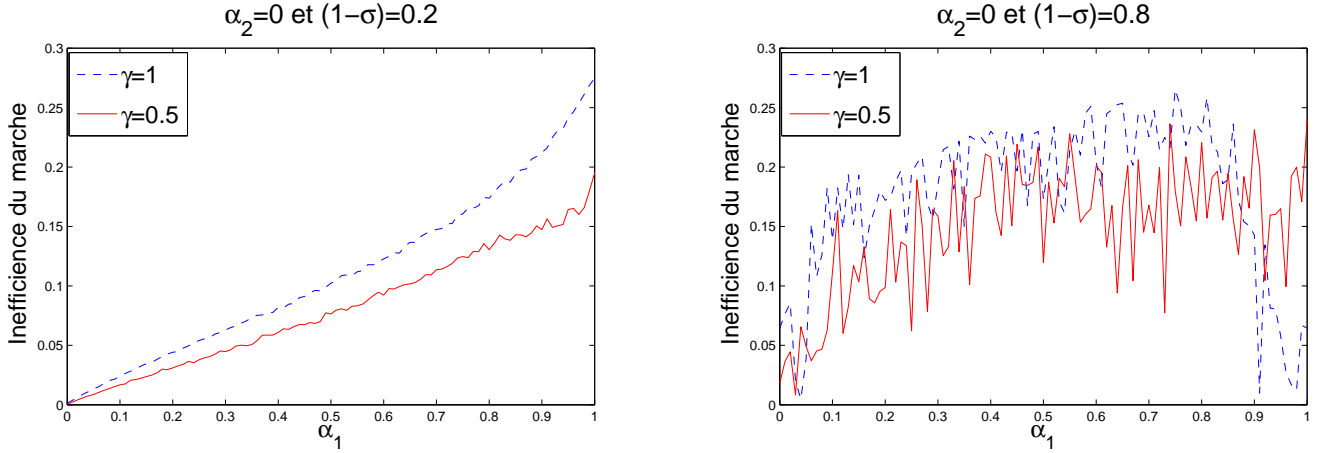


FIGURE 5.3 – Inefficiency du marché selon la composante d'adaptation des agents du premier groupe (α_1) lorsque celle des agents du second groupe (α_2) est nulle. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$, nombre d'agents par groupe : 250, 10 simulations.

ment leur prévision précédente ($\alpha_2 = 0$) et où l'autre moitié prend en compte le prix du passé au fur et à mesure que α_1 augmente. Mis à part lorsque α_1 est proche de 1, l'efficacité du marché est particulièrement mauvaise dans cette situation.

Lorsque les agents sont divisés en deux groupes égaux, le marché est le plus efficace lorsque la composante d'adaptation de chacun des groupes est petite. Plus le biais de confirmation et la proportion d'agents révisant leur anticipation sont grands, plus il faut que la composante d'adaptation de chaque groupe soit faible pour avoir une bonne efficacité. Un cas reste cependant particulier dans la situation de faible confirmation des tendances. En effet, lorsque le α d'un des groupes est nul, nous avons constaté que le marché était efficace si la composante d'adaptation des agents de l'autre groupe était très grande (~ 0.9).

5.2 Répartition des agents en deux groupes selon une variable Q

Nous avons constaté que (un cas particulier mis à part), comme lorsque les agents étaient homogènes, il était préférable qu'ils aient tous une composante d'adaptation petite, quels que soient le biais de confirmation et la proportion d'agents révisant leur anticipation. Nous allons observer si cela est toujours le cas lorsque les deux groupes ne comportent pas le même nombre d'agents.

Dans cette section, les agents sont toujours divisés en deux groupes. Par contre, ils ne sont pas répartis de manière égale. Il peut y avoir plus d'agents dans un groupe que dans l'autre. Pour les partager, nous définissons un nouveau paramètre, Q , qui représente la proportion d'agents parmi les N présents sur le marché dans le premier groupe. Les agents du second groupe seront donc au nombre de $(1 - Q)N$. Par l'ajout de cette nouvelle variable, nous ne pourrons plus étudier l'inefficience du marché selon toutes les composantes d'adaptation. Nous choisissons trois catégories de composantes d'adaptation qui nous permettront d'effectuer notre analyse.

- $\alpha_1 = 0.25$ et $\alpha_2 = 0.75$
- $\alpha_1 = 0.1$ et $\alpha_2 = 0.9$
- $\alpha_1 = 0.45$ et $\alpha_2 = 0.55$

Nous allons faire varier le paramètre Q et étudier l'efficiencia du marché, entre autre, selon sa valeur. Le cas où $Q = 0.5$ a été analysé dans la section 5.1, lorsque les groupes étaient égaux en nombre.

Il est important d'insister sur le fait que pour chacune des catégories de composantes d'adaptation, l'échelle représentée sur les graphes n'est pas identique. En effet, les résultats sont trop différents pour qu'on puisse les comparer avec des valeurs semblables (nous aurions eu des figures toutes blanches ou toutes noires). Nous nous devons donc d'être prudent lors de la lecture et de l'interprétation de ces figures.

Les graphes de la première colonne de la figure 5.4 représentent l'inefficience du marché. Nous pouvons voir directement que cette dernière n'est que très légèrement fonction du biais de confirmation dans ce cas de figure. De plus, pour chacun des cas, le marché est plus efficient lorsque la majorité des agents appartiennent au groupe auquel nous avons attribué la plus petite composante d'adaptation.

Considérons chacun des panels de la première colonne séparément. Lorsque $\alpha_1 = 0.25$ et $\alpha_2 = 0.75$, quelle que soit la proportion d'agents appartenant au premier et au second groupe, le marché n'est pas vraiment efficient. En effet, lorsque le prix a convergé, il reste éloigné de la valeur fondamentale. Le second panel est celui sur lequel nous pouvons observer la meilleure efficiency. En effet, lorsque la proportion d'agents ayant une composante d'adaptation de 0.1 est grande, le prix converge relativement proche de la valeur fondamentale. C'est également dans ce cas que le prix converge vers des valeurs plus diverses (de 0.05 à 0.3 de la valeur fondamentale). Lorsque les deux groupes d'agents ont une composante d'adaptation proche de 0.5, les prix finaux observés sont proches les uns des autres quelle

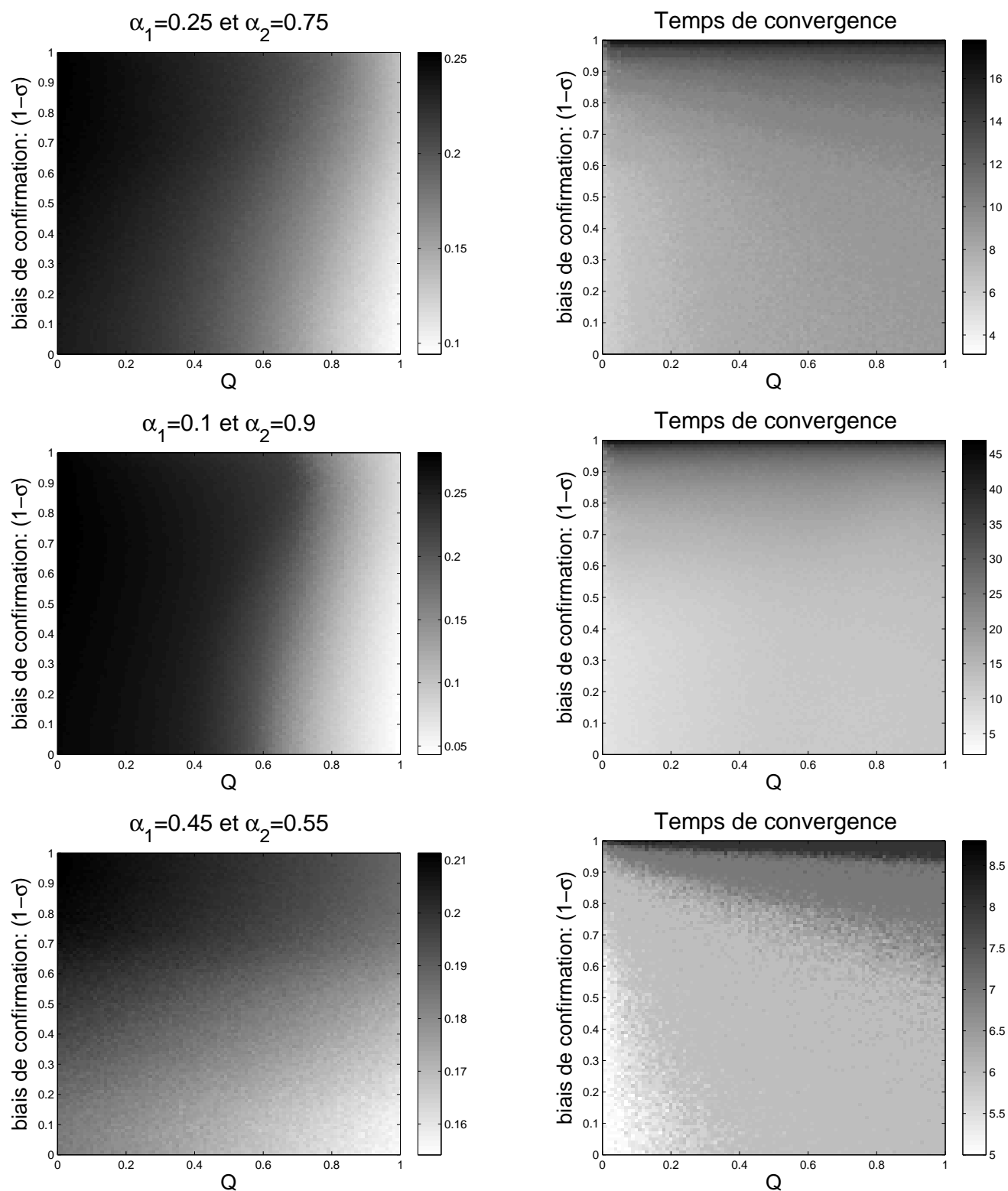


FIGURE 5.4 – Inefficiency du marché selon la proportion d'agents appartenant à chaque groupe (Q) et le biais de confirmation ($(1-\sigma)$). Variation de la composante d'adaptation attribuée à chaque groupe selon les panels. Seconde colonne : Temps de convergence de prix de l'actif. Valeurs des paramètres : $N = 500$, $c = 0.005$, $P_0 = 0.8$, 10 simulations.

que soit la proportion d'agents appartenant à chaque groupe. Comme dans les autres cas, le marché est le plus efficient si beaucoup d'agents ont la composante d'adaptation la plus faible, à condition que le biais de confirmation soit également petit. En effet, dans cette situation, tous les agents considère à peu près de la même façon le prix du passé et l'interaction sociale pour former leur anticipation, il est donc préférable qu'ils englobent l'information extérieure afin d'uniformiser les anticipations. C'est bien dans ce cas là que l'inefficience est la plus faible.

Si nous observons à présent les graphes de la seconde colonne, nous constatons que pour chaque cas de figure, le nombre de jours nécessaire pour que le prix du marché converge est faible (maximum 50 jours). Ce nombre de jours dépend fortement de la proportion d'agents appartenant à chaque groupe. De plus, il est décroissant en fonction du biais de confirmation. Alors que nous avions tendance à penser que lorsque le prix prenait beaucoup de temps pour converger, le marché était plus efficient, en observant simultanément les deux colonnes de la figure 5.4, nous constatons que ce n'est pas le cas. Pour chaque graphe, le marché met plus de temps à se terminer lorsque le biais de confirmation est grand et ce n'est pas dans ce cas là que le marché est le plus efficient.

Nous avons constaté qu'il était préférable que les agents aient une petite composante d'adaptation. Cependant, lorsque les groupes d'agents ne sont pas égaux, c'est dans le cas où les composantes d'adaptation sont très éloignées que nous obtenons le marché le plus efficient, à condition que la majorité des agents appartiennent au groupe dont la composante d'adaptation est petite.

Conclusion

Nous avons modélisé un marché sur lequel est échangé chaque jour un actif dont les agents anticipent le prix. Nous avons étudié l'efficacité du marché en fonction des trois paramètres que nous avons définis pour former les anticipations et le prix de l'actif. Ces paramètres sont la proportion d'agents révisant leur anticipation chaque jour, le poids que les agents donnent aux deux tendances (le prix du passé et l'interaction sociale) pour former leur anticipation et le seuil au-dessus duquel les agents rejettent l'information extérieure. Nous avons analysé le prix du marché tantôt analytiquement, tantôt numériquement.

La première situation que nous avons étudiée est celle où les agents ne considèrent que le prix du passé pour former leur anticipation. S'ils révisent tous leur anticipation, le prix auquel converge l'actif est le prix initial qu'on lui avait donné. Si seule une portion des agents révisent leur anticipation, le prix variera très peu et restera proche de sa valeur initiale, P_0 . Si ce dernier est éloigné de la valeur fondamentale, dans les deux cas le prix marché sera inefficace. Le prix n'a pas tendance à converger vers la valeur souhaitée.

Un autre cas est celui où les agents se basent uniquement sur l'interaction sociale pour créer leur anticipation. Dans la situation de forte confirmation des tendances, c'est-à-dire lorsque les agents ont tendance à rejeter l'information extérieure, nous avons montré analytiquement que le prix à long terme convergera vers la valeur fondamentale. En effet, cette valeur est un point fixe attracteur du mapping représentant l'évolution dynamique du prix. Dans la situation où les agents forment leurs anticipations en englobant l'information provenant de leurs pairs, le marché est également efficace quelle que soit la proportion d'agents révisant chaque jour leur anticipation.

Lorsque les agents combinent les deux tendances avec un poids respectif, nous avons considéré qu'ils avaient une faible liquidité initiale, certains seront donc exclus et remplacés par d'autres agents. Nous avons constaté que lorsque les agents donnent beaucoup de poids au prix du passé, le marché est inefficace. Par contre,

lorsque le biais de confirmation est faible, plus les agents donnent de l'importance à l'information extérieure, plus le marché sera efficient. Dans le cas où le biais de confirmation est élevé, le prix de l'actif converge vers la valeur fondamentale lorsque les agents donnent peu de poids au prix du passé, mais qu'ils considèrent fortement leur anticipation précédente.

Ensuite, nous avons imaginé que les agents présents sur le marché étaient intelligents. Pour interpréter cela, nous avons considéré que les acheteurs faisaient évoluer leur composante d'adaptation au fil des jours afin de minimiser les pertes. Nous avons ajouté un paramètre : l'inertie de la décision. Il permet de limiter la modification instantanée du poids que les agents donnent aux tendances. En plus de l'efficacité du marché, nous avons étudié l'évolution de la composante d'adaptation des agents, notamment en fonction du nouveau paramètre. Nous avons constaté que quelle que soit la composante d'adaptation initiale des acheteurs, celle-ci augmentait rapidement, si bien que presque tous les agents au moins un jour acheteurs considèrent finalement uniquement le prix du passé pour former leur anticipation. Plus la modification instantanée est bornée, moins ce phénomène est rapide. Lorsque le biais de confirmation est faible, le marché est le plus efficient lorsque la composante d'adaptation initiale est faible également. Plus elle est faible, plus le prix de l'actif converge vers la valeur fondamentale. Par contre, lorsque le biais de confirmation est élevé, il faut que les acheteurs donnent initialement un léger poids au prix du passé pour former leur anticipation pour avoir la meilleure efficacité du marché. De manière générale, le marché a tendance à être plus efficient lorsque peu d'agents révisent leur anticipation.

Pour finir, nous avons étudié un marché non-homogène dans lequel les agents sont divisés en deux groupes. Les agents de chaque groupe ont la même stratégie, c'est-à-dire la même composante d'adaptation. Lorsque les deux groupes comportent le même nombre de personnes, le marché est efficient lorsque les composantes d'adaptation de chacun des groupes sont faibles. Nous avons également constaté que lorsque les agents d'un des groupes considéraient uniquement l'interaction sociale pour former leur anticipation, l'inefficacité du marché ne suivait pas la croissance habituelle. Par contre, si les deux groupes ne sont pas égaux en nombre, c'est lorsque le biais de confirmation est faible et que la majorité des agents considèrent avec plus de poids l'interaction sociale que le prix de l'actif converge le plus proche de la valeur fondamentale. Ce phénomène s'accroît lorsque les valeurs des composantes d'adaptation sont très éloignées c'est-à-dire proches des bornes de l'intervalle.

A la suite de cette analyse, nous pouvons conclure que généralement le marché

sera efficient lorsque les agents donnent une grande importance à l'information extérieure et peu, voire pas, au prix du passé. L'échange et le partage des connaissances entre les agents font évoluer le prix vers la valeur attendue. Il est d'autant plus curieux que lorsque les stratégies sont adaptatives, le poids attribué à chacune des tendances augmente fortement. Le marché laissé à lui-même aurait donc tendance à être non-efficient.

En perspective, il pourrait être intéressant d'étudier l'inefficience du marché lorsque le prix initial est inférieur à la valeur fondamentale. Cela influencerait fortement les résultats que nous avons obtenus lorsque les acheteurs révisent leur stratégie. En effet, deux cas pourraient être traités, celui où tous les agents souhaitant acheter révisent leur composante d'adaptation en prévision du futur et celui où les agents sélectionnés pour l'achat (selon le nombre de vendeurs) font cette révision. Dans l'analyse effectuée dans ce mémoire, ces deux cas étaient semblables puisque le nombre d'acheteurs était généralement inférieur au nombre de vendeurs. Selon les conclusions obtenues, l'étude d'un cas où la stratégie adaptative des agents fait chuter leur composante d'adaptation pourrait donner des résultats qui amélioreraient fortement l'efficience du marché.

Annexes

Résultats numériques

Lors de la réalisation des programmes permettant de reproduire les résultats de l'article de référence, un problème de précision a été rencontré. Ce problème était dû à l'utilisation de diverses fonctions Matlab. Afin d'avancer dans le travail et d'obtenir de nouveaux résultats en partant sur les bases exactes, certaines fonctions provenant de l'article ont été utilisées. Cela a permis de comparer les résultats et d'obtenir une précision adéquate. Cependant, toutes les fonctions nécessaires à l'analyse numérique ont été codées pour ce travail.

Bibliographie

- [1] G.ALDASHEV, T. CARLETTI, S. RIGHI, "Follies subdued : Informational efficiency under adaptive expectations and confirmatory bias", 26 octobre 2010. doi :10.1016/j.jebo.2011.03.001 (A digital object identifier (DOI) can be used to cite and link to electronic documents. A DOI is guaranteed never to change, so you can use it to link permanently to electronic documents.)
- [2] Investopedia, dictionary, ([http ://www.investopedia.com/terms/c/centralizedmarket.asp](http://www.investopedia.com/terms/c/centralizedmarket.asp); consulté le 10/04/2011)
- [3] Center Blog, valeur fondamentale, ([http ://geopol.centerblog.net/5193509-Valeur-fondamentale](http://geopol.centerblog.net/5193509-Valeur-fondamentale); consulté le 11/04/2011)
- [4] Investorwords, asset : definition, ([http ://www.investorwords.com/273/asset.html](http://www.investorwords.com/273/asset.html); consulté le 24/04/2011)
- [5] ALMONT T., "Les biais en épidémiologie", (www.theral.fr/theraltrain/assets/Les%20biais.pdf; consulté le 09/05/2011)
- [6] GROUSSON M., "Crises financières, la science peut-elle les prédire ?", *Sciences & Vie*, 2009, pp. 64-71.
- [7] GIOT P., "Chapitre 14 : Les marchés financier", *Gestion financière*, notes de cours 2009-2010.
- [8] Juan F. Navarro LLINARES, *Métodos de matemática aplicada*, publicaciones de la universidad de Alicante, Alicante, 2007, pp. 152-155.
- [9] G. WEISBUCH, G. DEFFUANT, F. AMBLARD, J-P. NADAL, "Meet, Discuss, and Segregate, 2002!", Wiley Periodicals , Vol. 7, No. 3, 2002, pp. 55-63.
- [10] CASTELLANO C., FORTUNATO S., LORETO V., "Statistical physics of social dynamics", *Reviews of modern physics*, Vol.81, No. 2, 2009, pp.608-610.
- [11] ALternatives économiques : Léon Walras. ([http ://www.alternatives-economiques.fr/leon-walras-1834-1910-_fr_art_222_27874.html](http://www.alternatives-economiques.fr/leon-walras-1834-1910-_fr_art_222_27874.html); consulté le 11/12/2011)